欧姆社学习漫画

# 漫画微积分

〔日〕小岛宽之/著
〔日〕十神　真/漫画绘制
〔日〕株式会社BECOM/漫画制作
张仲桓/译




科学出版社
www.sciencep.com

PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com

# ❀前　言❀

## ——正因为是漫画所以可以轻松理解——

此刻，翻开这本书的您，我想一定属于下列中的两种类型之一。第一类，十足的漫画迷。这类读者一定会想“通过漫画来学习微积分会是一种什么样的感觉呢，真令人期待”。如果我们说的正是您，那就请您赶紧去付款吧！这本书绝对不会令您失望。作为一本“漫画书”来讲，这本书是十分有趣的。它是由当红漫画家十神真作画，并且由专业的漫画制作公司Becom为其编写的剧本。另外，本书还曾被漫画杂志刊载，其品质毋庸置疑。如果您曾经跟着《美味大挑战》学做菜、在《棋魂》中迷上过围棋、在《危险调查员》中对考古学萌发了兴趣的话，那么您一定也会因这本书而喜欢上微积分的。

“话虽如此，但是一本漫画数学书又能有趣到哪里去呢？”或许您会心存这样的疑虑。没错，实际上，最初从欧姆社的编辑那里听到关于这本书的构想时，我婉言谢绝了。想想市面上的那些“漫画××学”虽有漫画之名，实际上要么就只是塞满了插图，要么就只是将图画得很大，多为徒有其名、令人失望的东西。但是，看过样书（欧姆社的《漫画统计学》）之后，我的想法便发生了转变。该书同之前所说的那些书有所不同，因为它即使仅作为漫画来读也是非常有趣的。它并不单单只是通过插图来进行说明，它还是一部叙事性漫画书。编辑说我们的这本书也同样走叙事性漫画的路线，既然如此，我也就决定答应下来了。实际上，本人很早之前就有“用漫画的方式进行教学”的想法，而现在正好是一个进行尝试的好机会。正因为这样，我们保证您越是对漫画有所挑剔，这本书就越会令您享乐其中。

另外一类会翻看本书的人的想法可能是“对微积分感到头痛，甚至恐惧，不过或许漫画可以解决这一问题”。如果您属于这类人的话，那么现在我要说：“没错，您的直觉是对的，您是一个非常幸运的人。”这本书正是一本为那些对微积分无从下手的人配备了各种训练方法的书。总之，且不说这本书是“通过漫画进行讲解”的，单就微积分的“教学方法本身”而言，也是同以往的书籍有着本质差异的。

首先，本书提出了“微积分的实际用途是什么？”这一问题。但这个问题若只局限于“极限”（数列极限$\varepsilon$-$\sigma$理论）的教学方法的话是很难搞清楚的。如果不能清楚地知道微积分是用来做什么的，也就不能很好地理解微积分，仅仅使用它，是远远不够的。最后只会落得个“靠死记硬背过关”的无奈结果。本书在谈论“极限”问题时，便仅限于极限，而所有公式都以“一次近似”作为基本思路。您一定会觉得这些“公式的含义”很容易理解，并且完全能够将它们图像化。而且，这个教学方针的改变，使得从

我的博客 http://book-life.blog.163.com

微分到积分的学习变得更为顺畅，并且能够以最短的时间完成这一过程。再进一步讲，就是像三角函数、指数函数的微积分这部分，以前，总是听得糊里糊涂，感觉很困难，但现在它也被作者原创的方法攻克了，这些方法在一般的教科书上是没有的。此外，这本书甚至连泰勒级数展开和偏微分都讲到了，同以往已出版的漫画刊物相比内容更为丰富，这也正是本人的得意之处。最后，作为补充，微积分也会在其应用时的老搭档——物理学、统计学和经济学三个领域中出现，本书给出了很多“特别适合用微积分”的学习材料。由于以上种种，微积分对您来说已经完全不再是痛苦的事情了，您应该会觉得它是一件便利的工具吧。

请原谅我的固执与唠叨，我还是认为以上所说的这些效果“正因为是漫画才可能做到”。请您仔细想想看，为何读一本漫画所获得的信息量会比读一本小说得到的还要多。其原因是，漫画是可视化的数据，进一步说就是“动画”。而对于微积分来说，它本身就是“记述动态现象”的数学。因此，使用漫画进行教学的确是一个非常恰当的选题。

那么，就请您翻开本书去体会漫画和数学之间的绝妙组合吧！

小岛宽之



PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com

# ✿目　录✿


序　章　函数是什么　1

✿ 本章习题　14

第 1 章　微分就是将函数化繁为简　15

✿ 1. 近似函数的优点　16

✿ 2. 要注意误差率　27

✿ 3. 生活中也会用得到的函数　32

✿ 4. 近似一次函数的求解方法　39

✿ 本章习题　41

第 2 章　掌握微分的技巧　43

✿ 1. 和的微分　48

✿ 2. 积的微分　53

✿ 3. 多项式的微分　62

✿ 4. 由“微分＝0”可知极值　64

✿ 5. 平均值定理　72

✿ 本章习题　76

第 3 章　积分——平滑变化的量的累加之和　77

✿ 1. 微积分基本定理的形成　82

✿ 2. 微积分的基本定理　91

✿ 3. 积分公式　95

✿ 4. 基本定理的应用举例　101

✿ 5. 微积分的基本定理的验证　110

✿ 本章习题　112


我的博客 http://book-life.blog.163.com

## 第 4 章　复杂的函数可以通过积分解决　113

- 1. 三角函数是做什么用的　114
- 2. cos是垂直投影　120
- 3. 先来了解三角函数的积分　123
- 4. 指数和对数　129
- 5. 指数和对数的定义　133
- 6. 指数函数和对数函数的小结　138
- 本章习题　142

## 第 5 章　泰勒展开　143

- 1. 多项式近似　144
- 2. 泰勒展开的求解方法　153
- 3. 各种函数的泰勒展开　158
- 4. 从泰勒展开中能知道些什么　159
- 本章习题　176

## 第 6 章　从多个因子中仅取其一即为偏微分　177

- 1. 什么是多变量函数　178
- 2. 二元一次函数仍然是最基础的　182
- 3. 二元函数的微分叫做偏微分　189
- 4. 如何理解全微分　195
- 5. 对极值条件的应用　197
- 6. 将偏微分用于经济学　200
- 7. 对多元复合函数求偏微分的公式——锁链法则　204
- 本章习题　216

## 尾　声　为什么会有数学　217


PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com

# 附 录 223


✿ 附录 A 练习问题的答案及讲解 224

✿ 附录 B 本书中所涉及的主要公式、定理及函数 227


本故事纯属虚构。与真实的人物、机构名称无任何关系。
此外，书中的图和表是为了便于理解本书的内容，同实际的数值也有所差异。

我的博客 http://book-life.blog.163.com

# 序　章

# 函数是什么



PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com






我的博客 http://book-life.blog.163.com









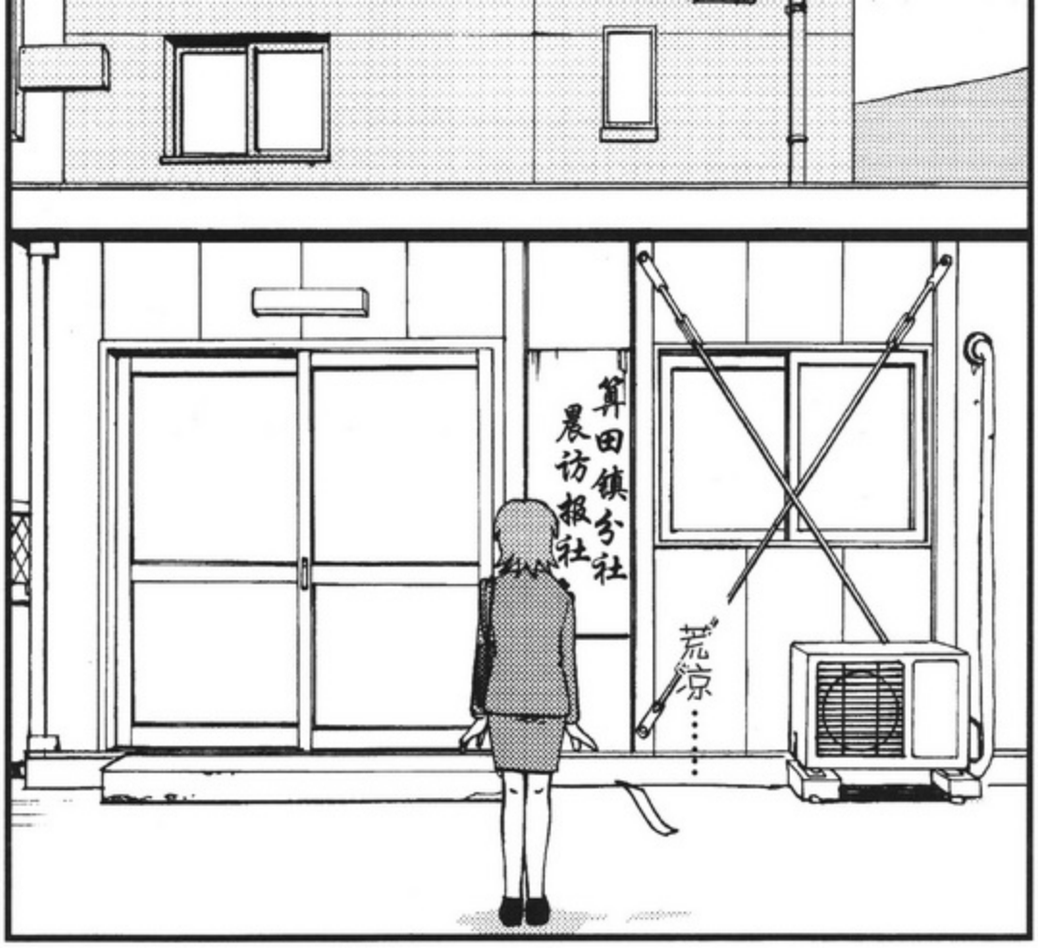






PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com

算田镇分社
晨访报社












我的博客 http://book-life.blog.163.com







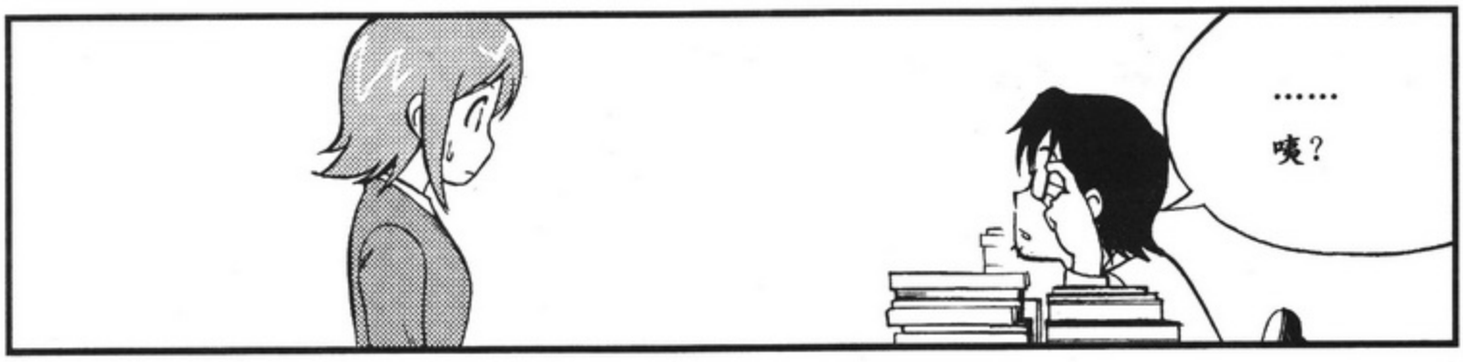






PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com














我的博客 http://book-life.blog.163.com




PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com













我的博客 http://book-life.blog.163.com

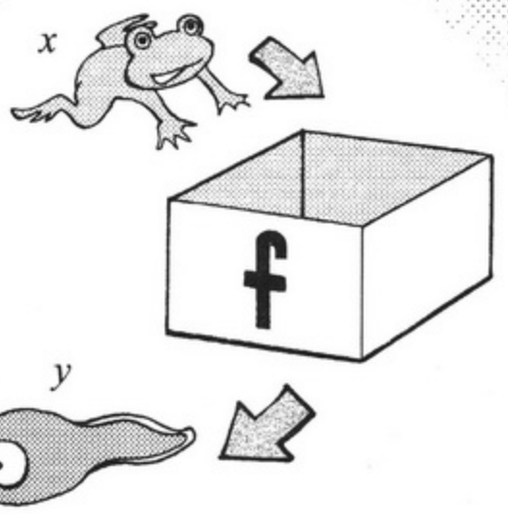
函数经常用式子$y=f(x)$进行表示，你知道吗？

不知道!!

举个例子：我们把$x$和$y$当作动物。

动物$y$ ← $f$ ← 动物$x$

把$x$当成青蛙，把青蛙放进一个叫做$f$的盒子中，变换一下，就能出来一只叫$y$的蝌蚪。




那个……$f$是什么啊？

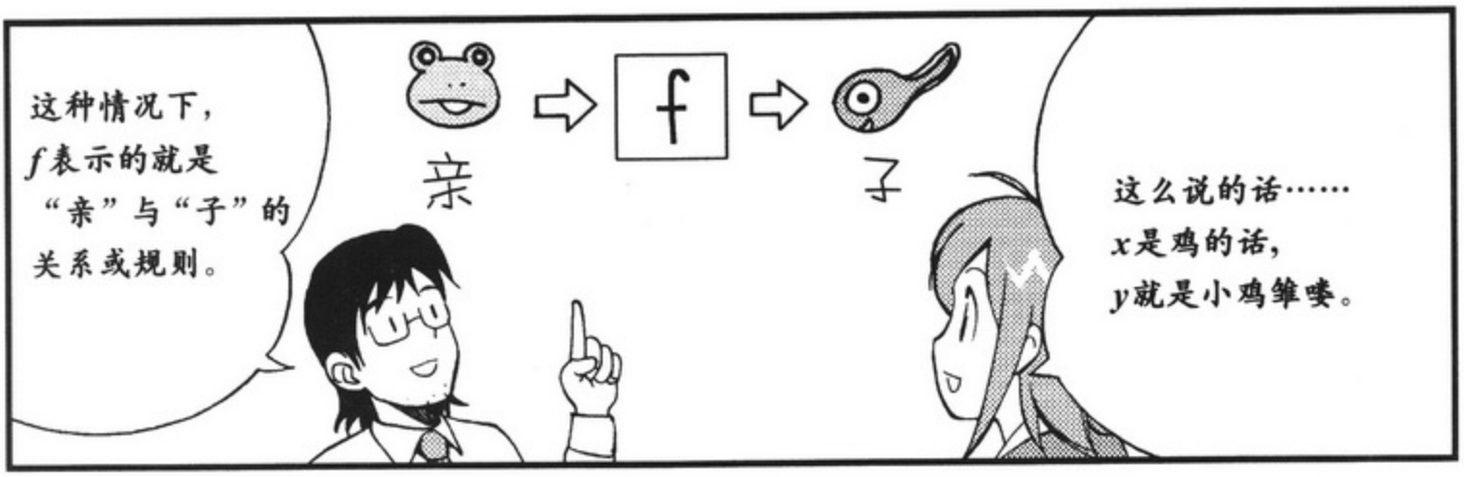
是英语中表示函数的单词function中的f，function是“功能”或者“作用”的意思。

function

就是使用$f$给$x$施加某种规则或关系，进而推导出$y$。

实际上，用什么样的字母表示都是可以的。

PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com







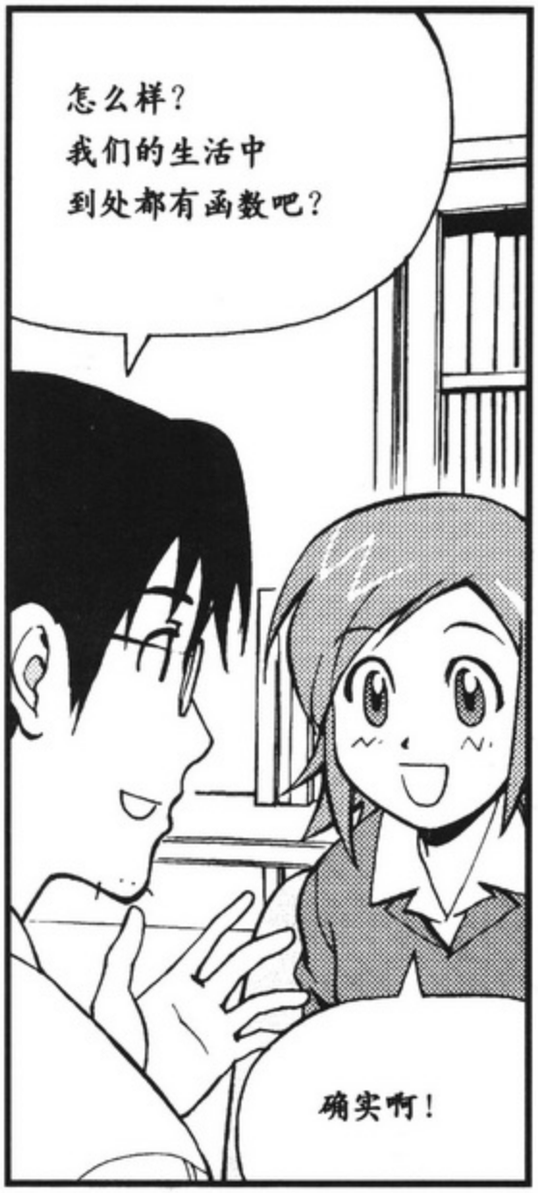







我的博客 http://book-life.blog.163.com













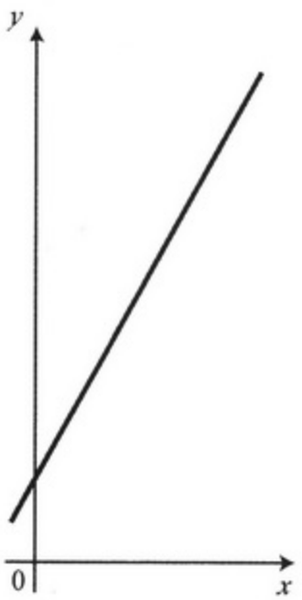
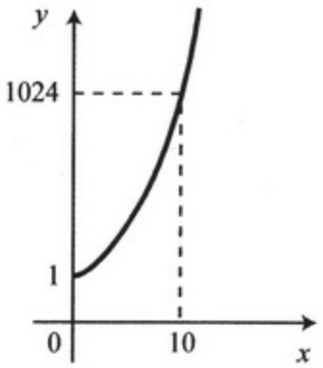
PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com





我的博客 http://book-life.blog.163.com

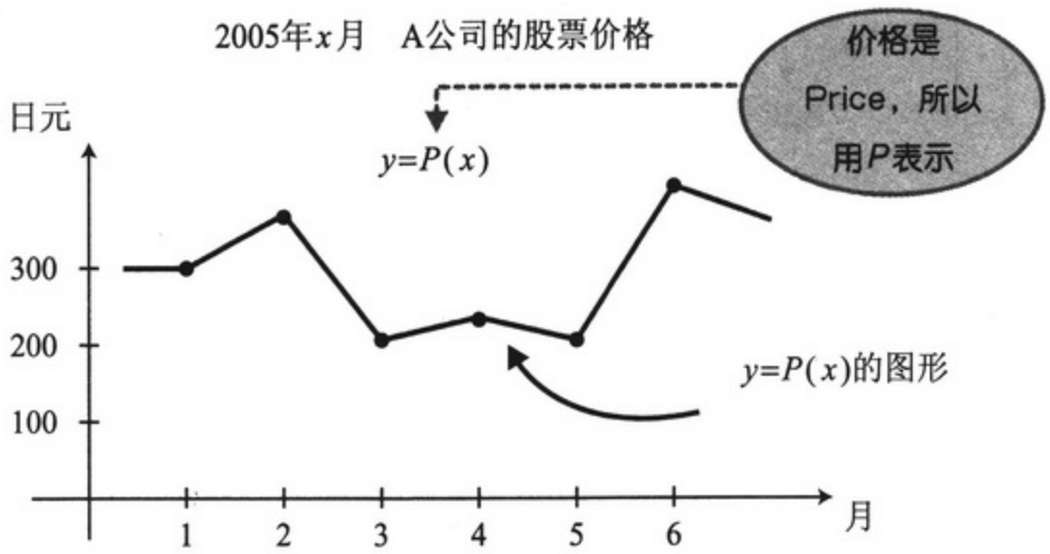
■ 表1　函数的特征

| 描述实例 | 计算式 | 图　例 |
| --- | --- | --- |
| 因果 | 温度为 $x$℃时，蟋蟀 1 分钟鸣叫的次数为 $y$（次/分）。<br>温度为 $x$℃时，蟋蟀 1 分钟鸣叫的次数 $y$（次 / 分）大约可以表示为<br>$y=g(x)=7x-30$<br>$x=30$℃　$7\times30-30$（这里我们使用 $g(x)$试试看）<br>因此 1 分钟鸣叫 180 次 | 画成图形的话，就是一条直线（一次函数）。<br> |
| 变化 | 在温度为 $x$℃的空气中，声速 $y$(m/s)可表示为<br>$y=v(x)=0.6x+331$<br>温度为 15℃时，<br>$y=v(15)=0.6\times15+331=340$(m/s)<br>温度为 −5℃时，<br>$y=v(-5)=0.6\times(-5)+331=328$(m/s) | |
| 单位变换 | 将华氏温度 $x$(℉)变换为摄氏温度 $y$(℃)<br>$y=f(x)=\frac{5}{9}(x-32)$<br>$x=50$℉　$\frac{5}{9}(50-32)\rightarrow10$℃ | |
| | 计算机采用经过二进制法(0，1)处理后的信息，$x$ 比特所表示的信息量为 $y$，则<br>$y=b(x)=2^x$<br>（第4章第130页中所采用的） | 画成图形的话，就是指数函数。<br> |

PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com

在画图时，也存在既不能用直线也不能用特定形状的曲线来表示的函数。






虽然不能用一个已知的式子表示$P(x)$，但它也是函数。

到了7月才能画出$y=P(6)$的图形。

要是在5月间就知道$y=P(6)$的话，那可就要发大财了!!

函数组合在一起之后称为“复合函数”。我们能够通过复合函数将因果关系扩展到更广阔的范围。



$x \rightarrow \boxed{f} \rightarrow f(x) \rightarrow \boxed{g} \rightarrow g(f(x))$　$f$ 和 $g$ 的复合函数。

**序章　本章习题**

**1.** 求出温度为华氏$x$℉时，蟋蟀1分钟鸣叫的次数$z$次/分。



我的博客 http://book-life.blog.163.com

# 第1章

# 微分就是将函数化繁为简



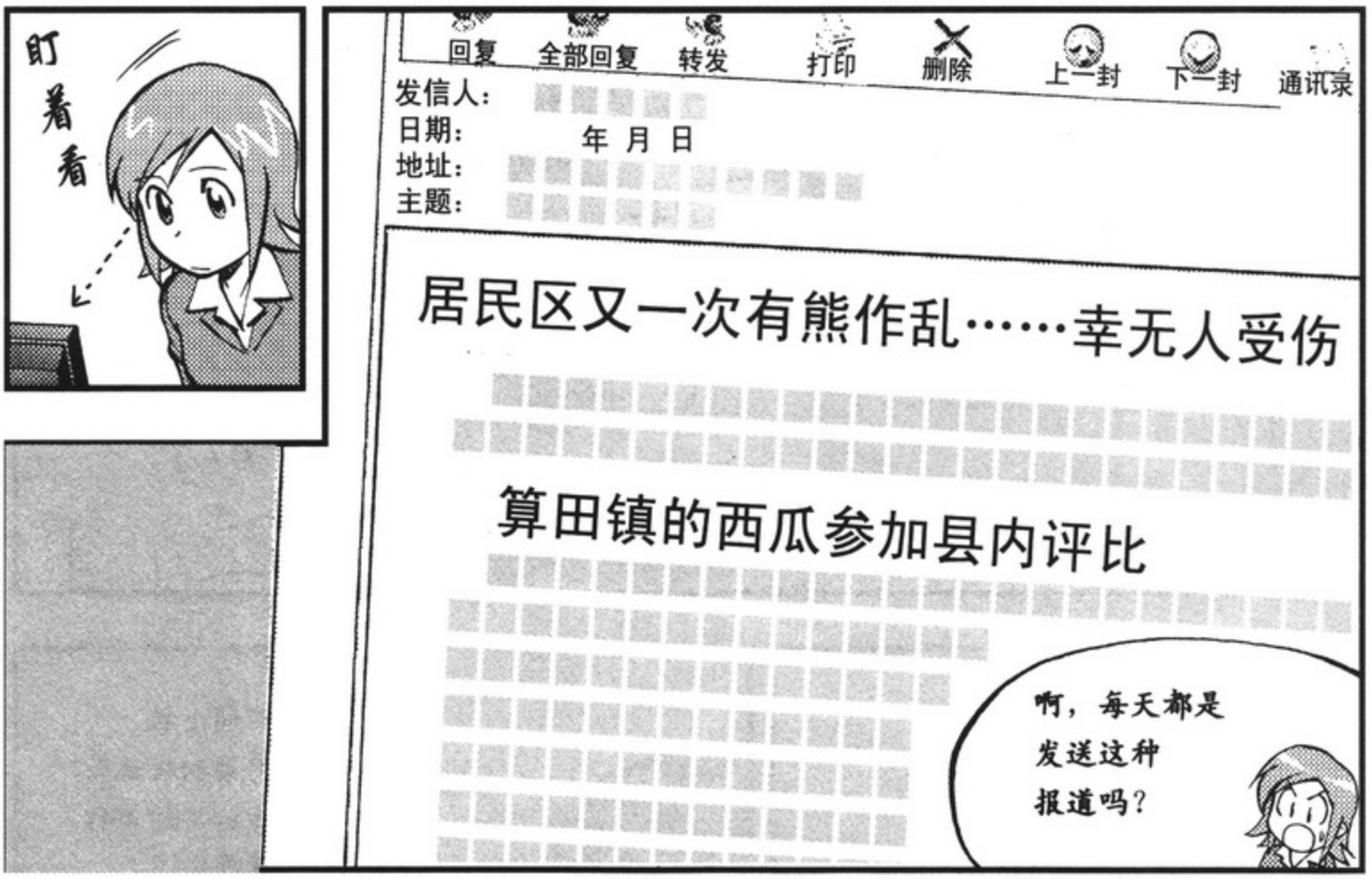
PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com

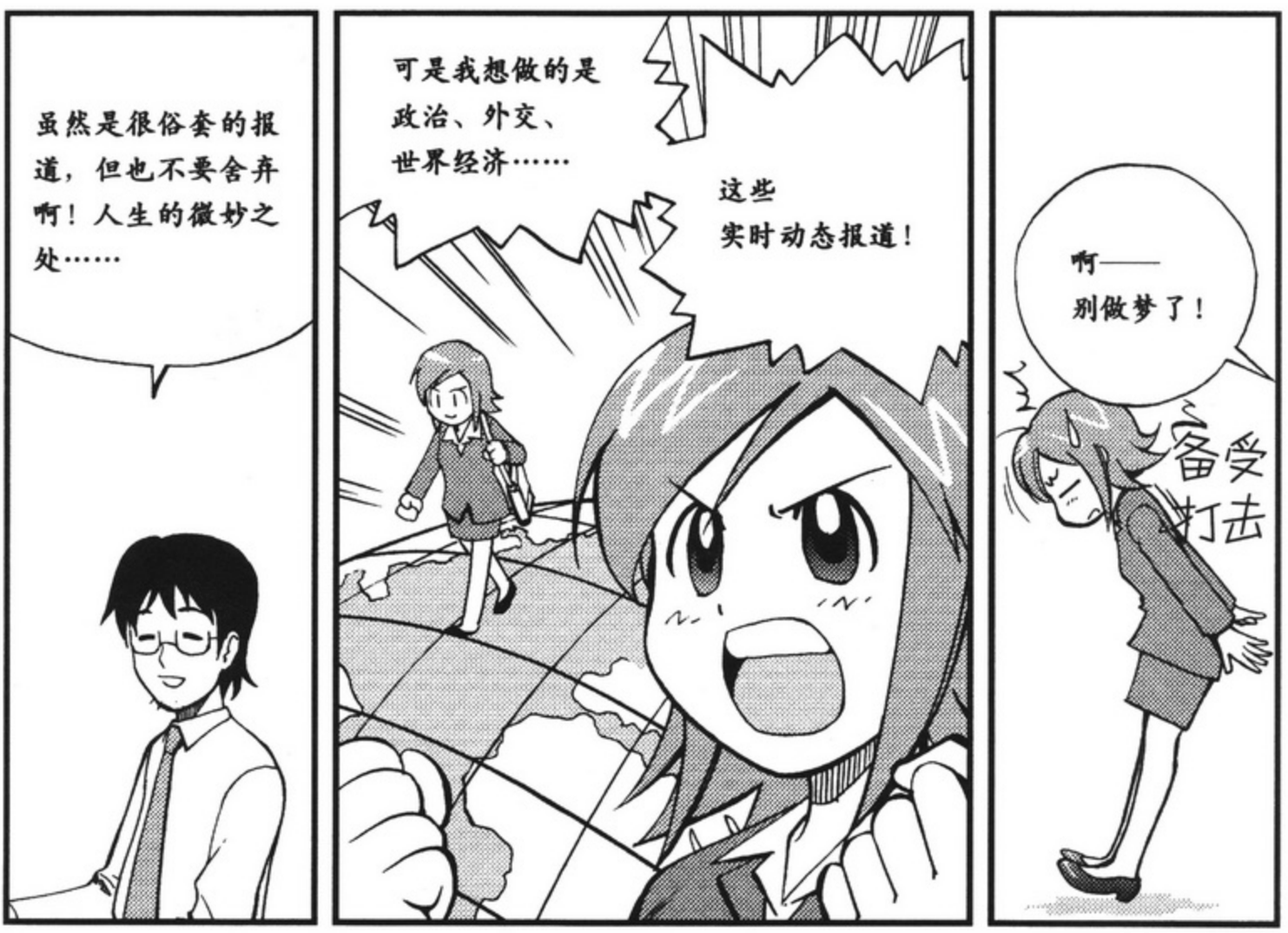
# 1 近似函数的优点





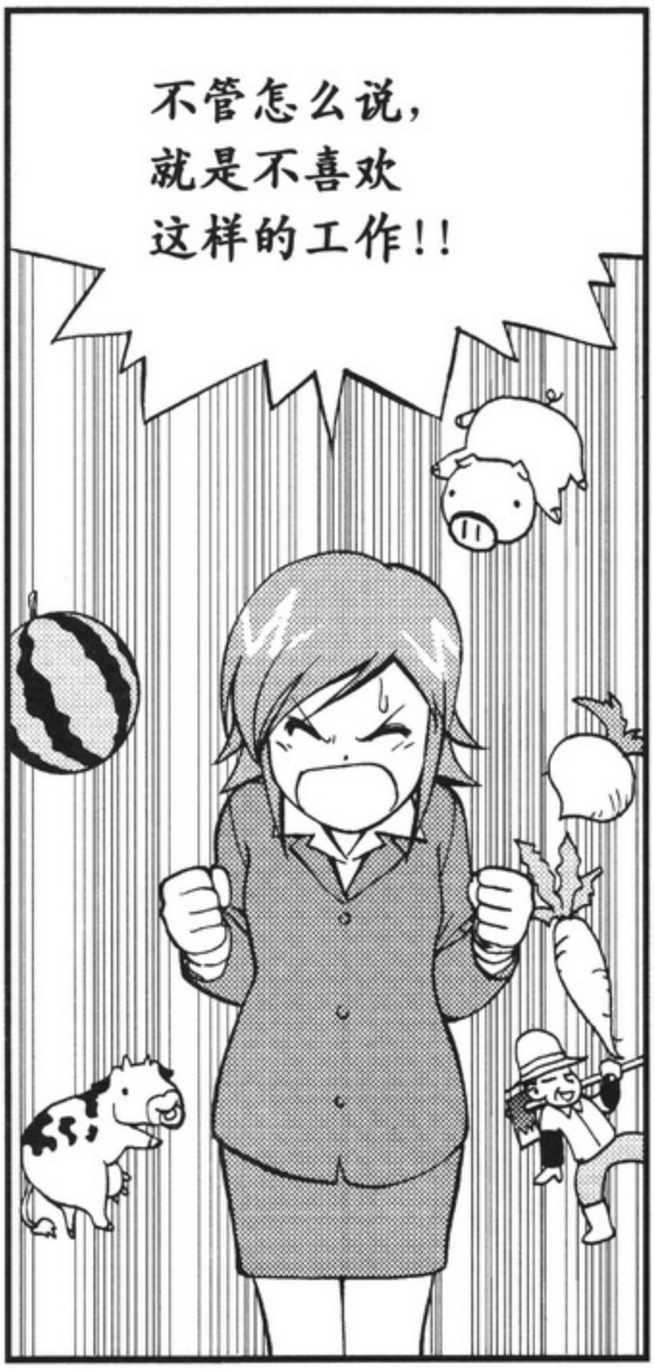
我的博客 http://book-life.blog.163.com




PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com





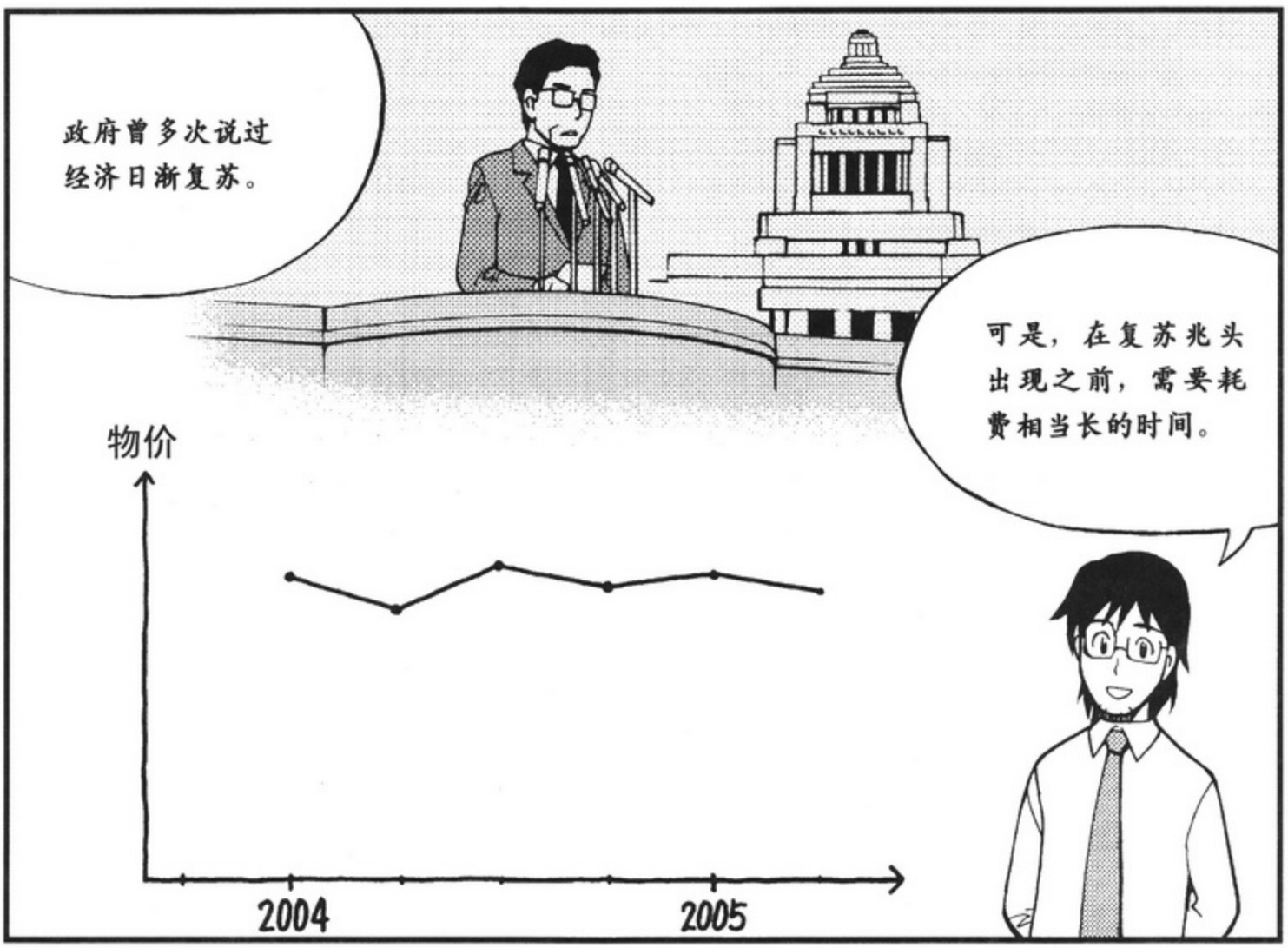






我的博客 http://book-life.blog.163.com

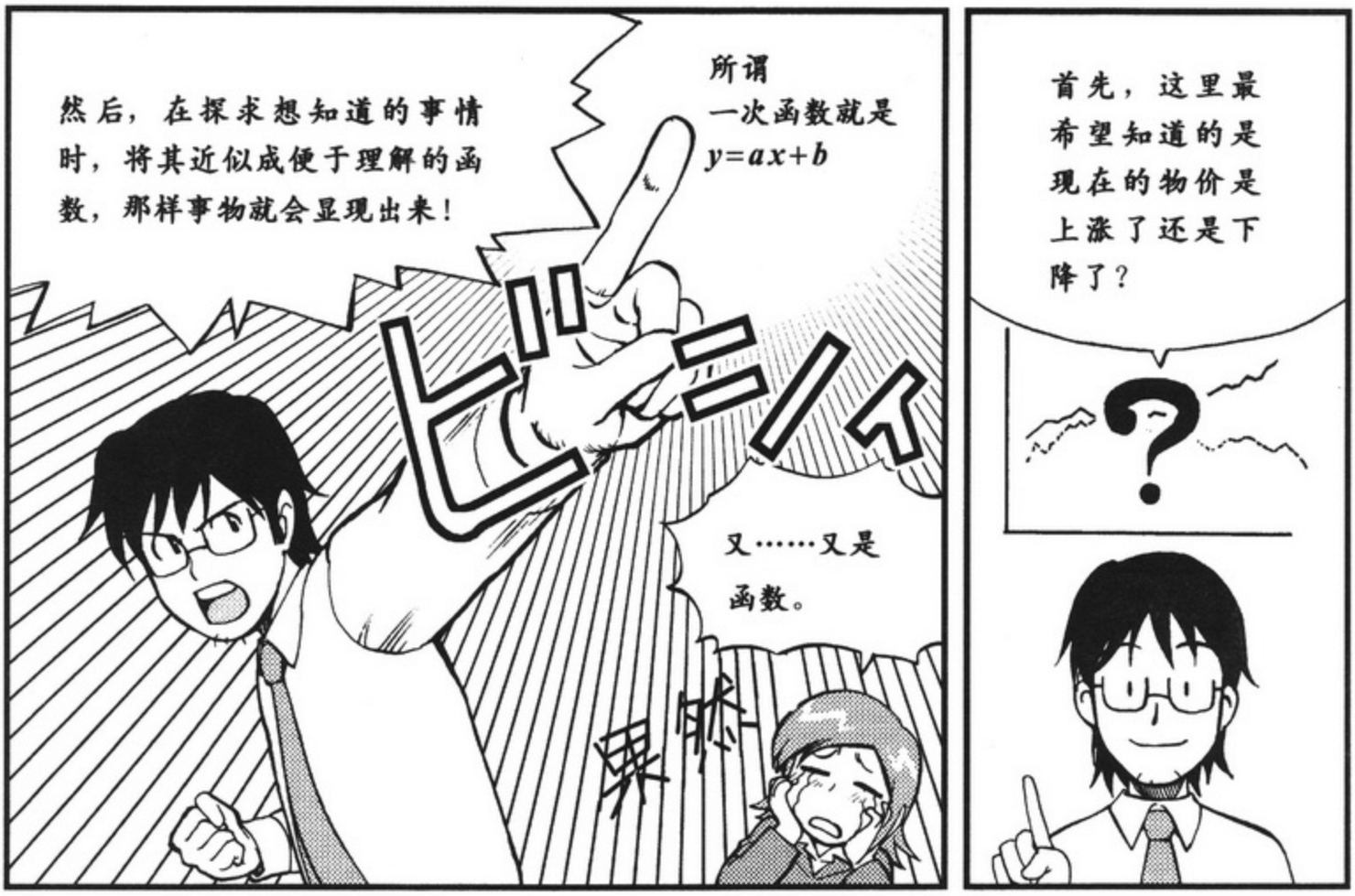


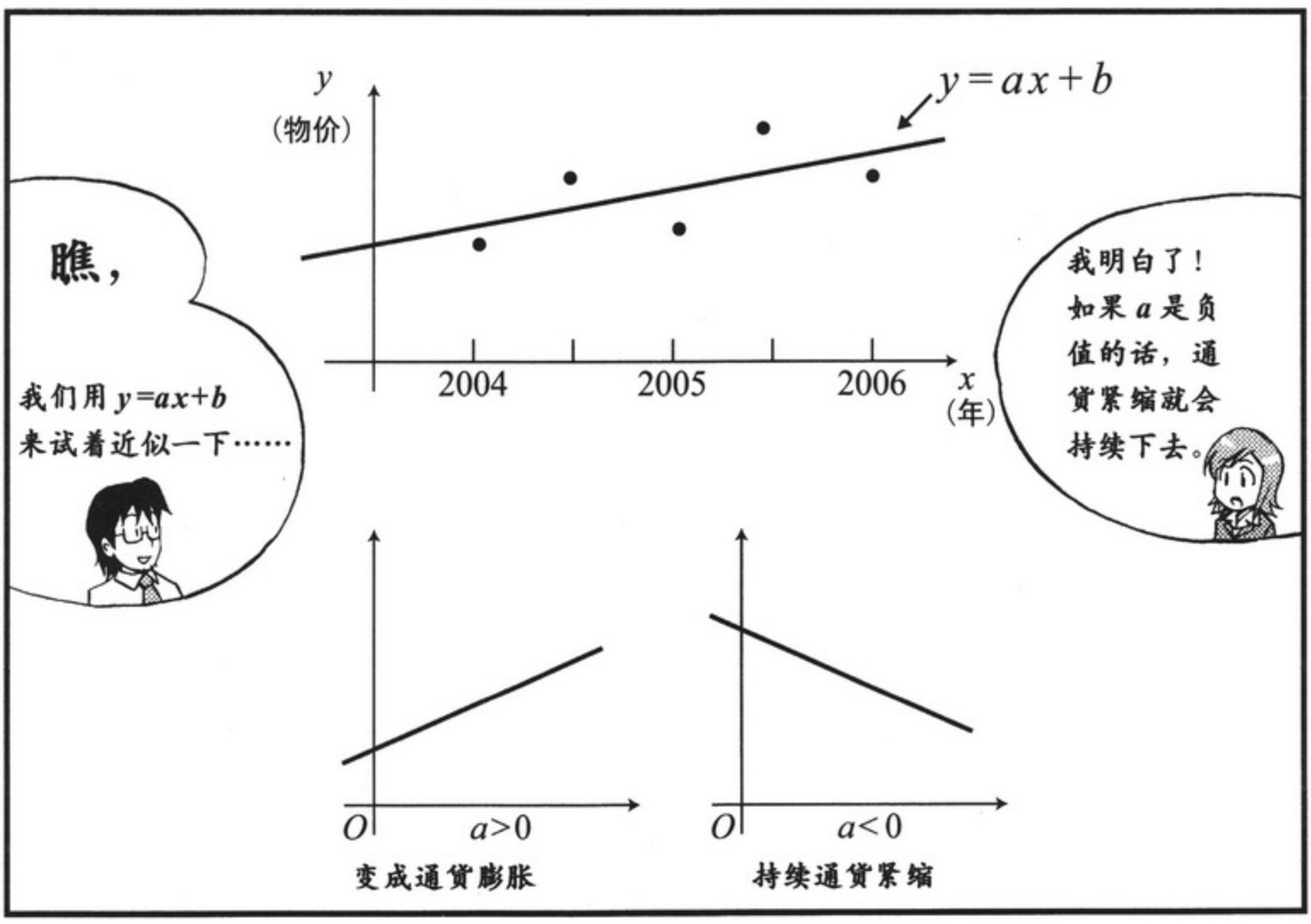







PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com



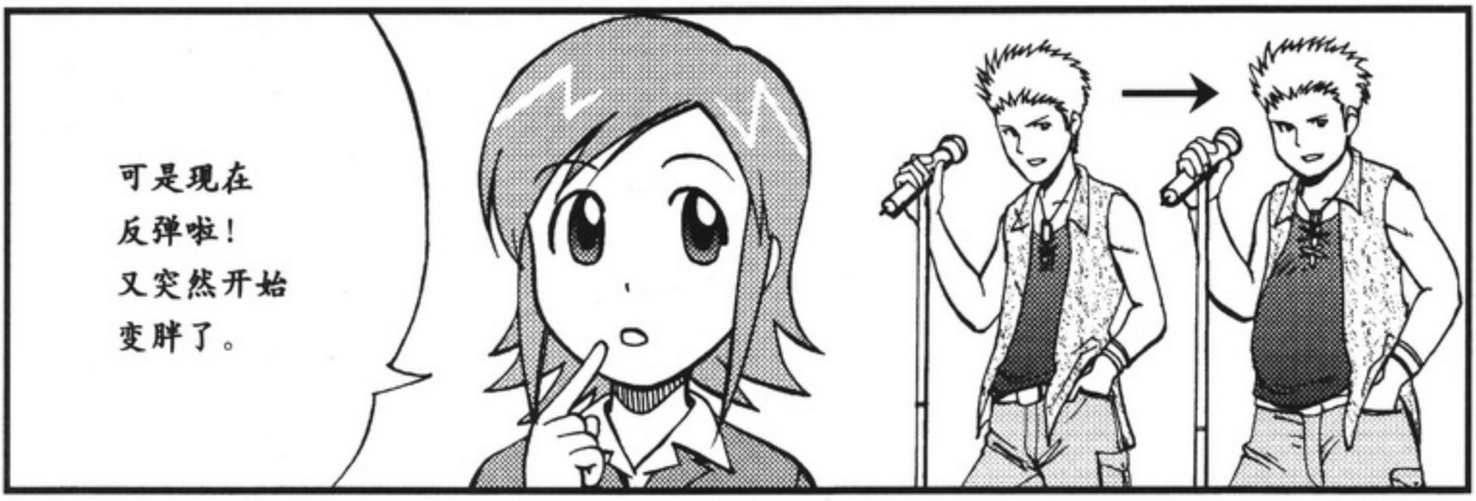





我的博客 http://book-life.blog.163.com



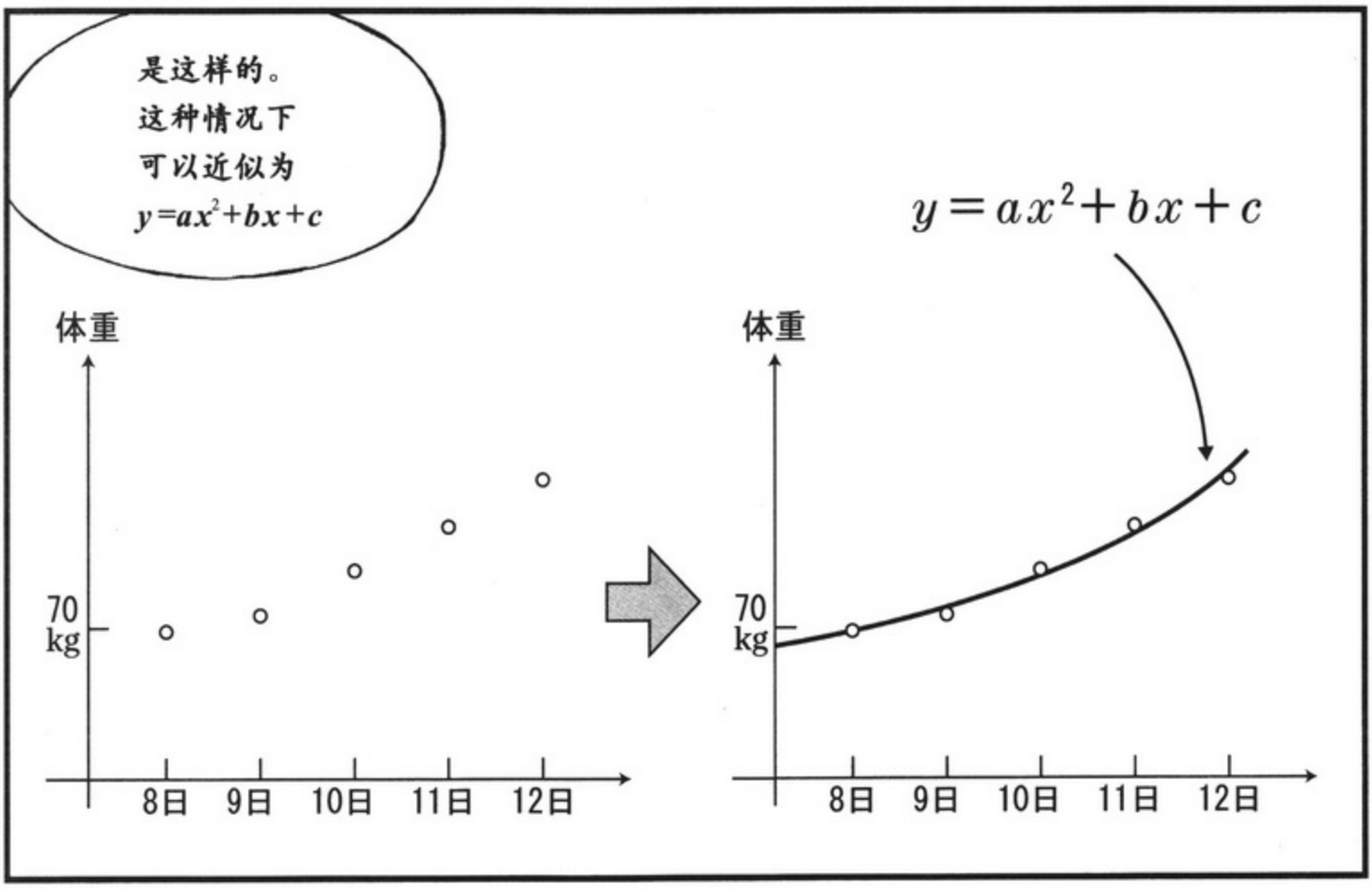

PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com





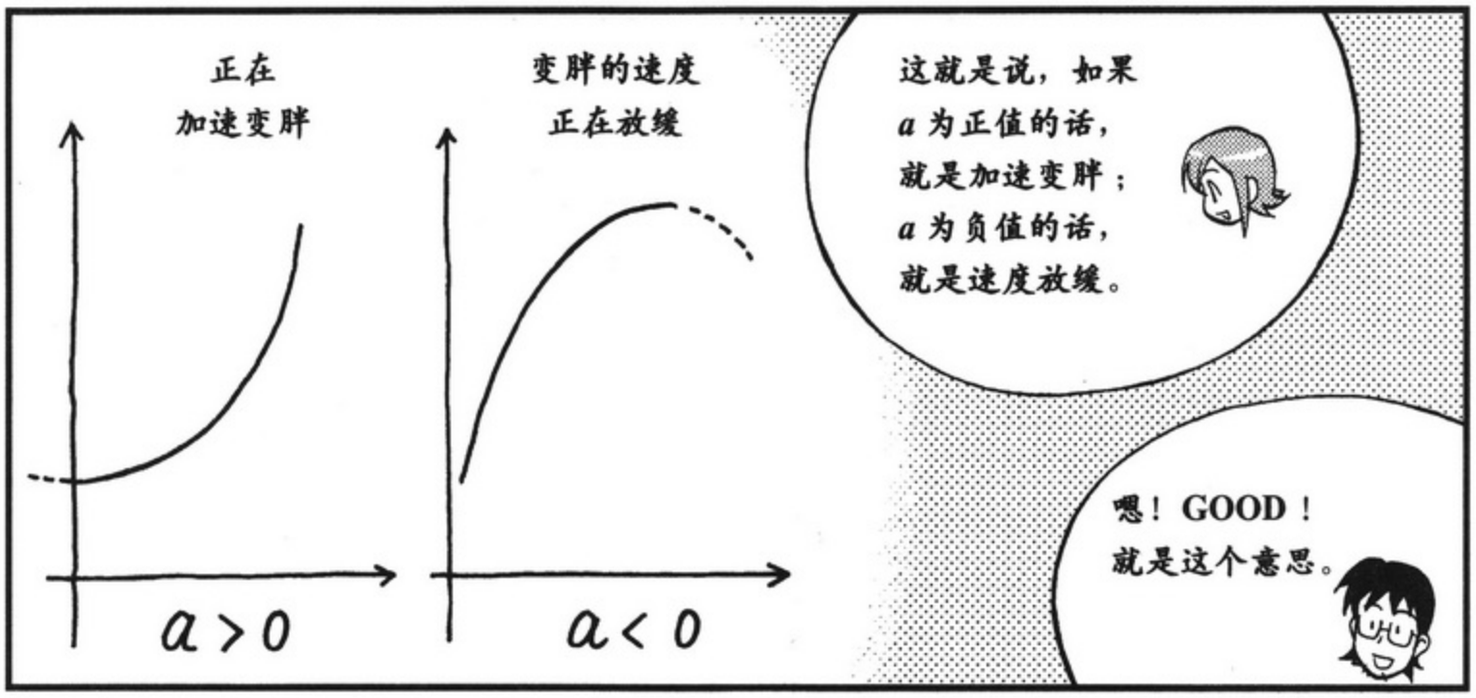


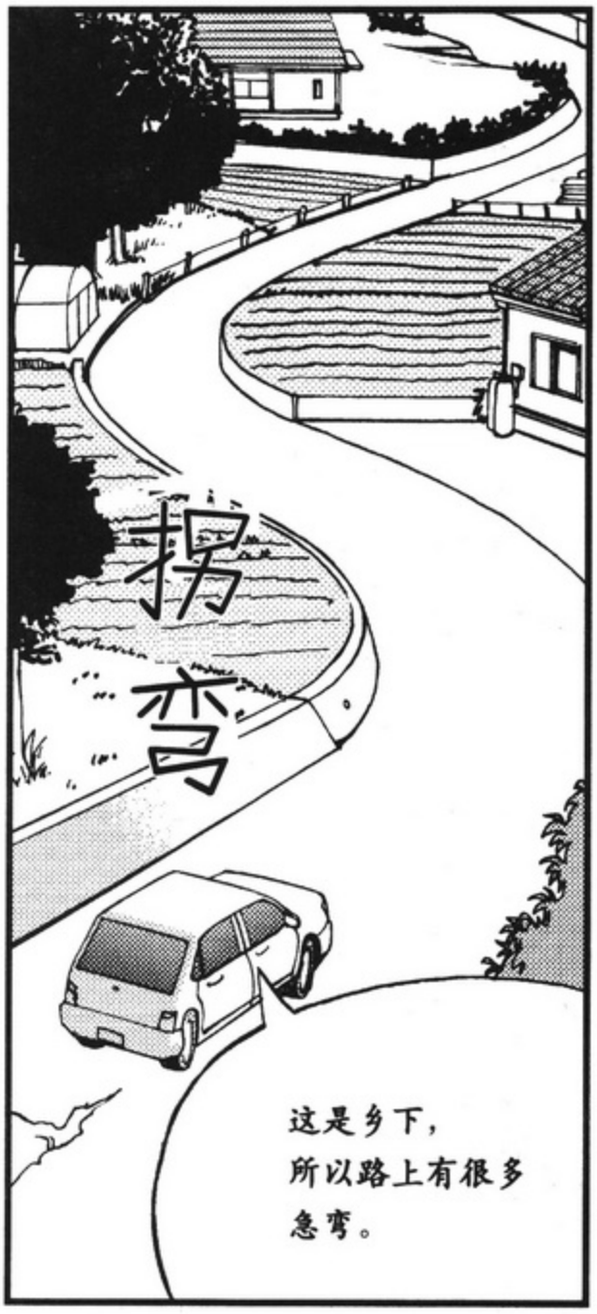




我的博客 http://book-life.blog.163.com







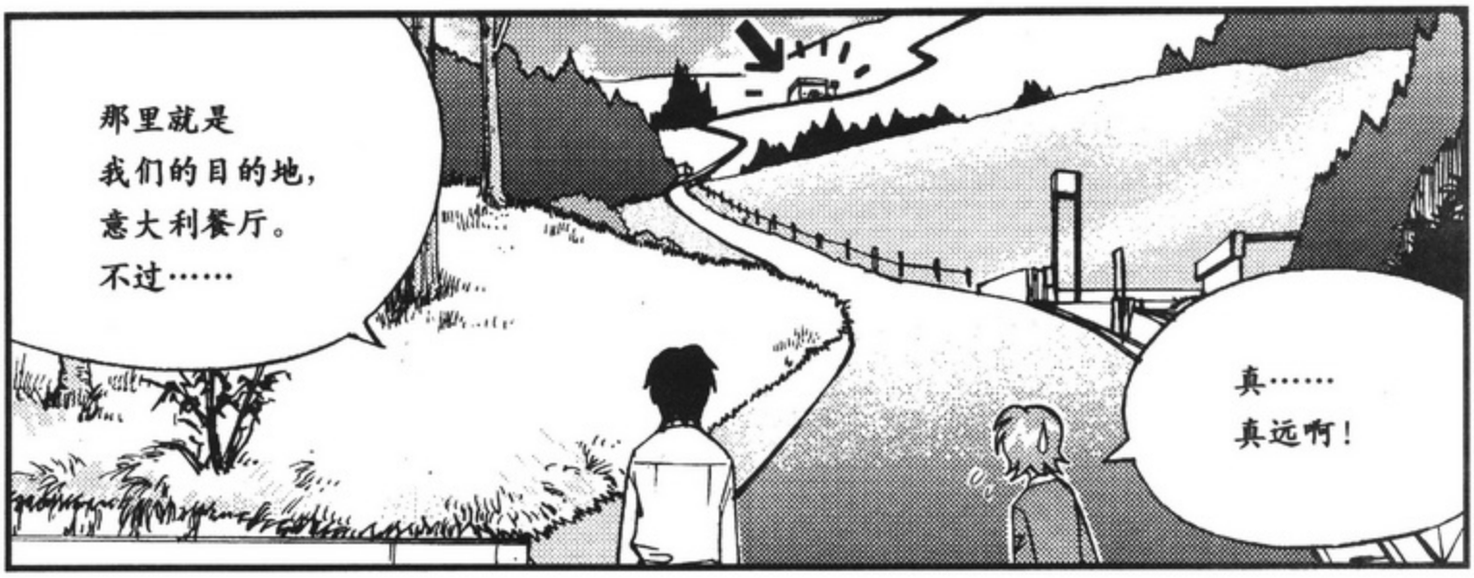



PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com





我的博客 http://book-life.blog.163.com





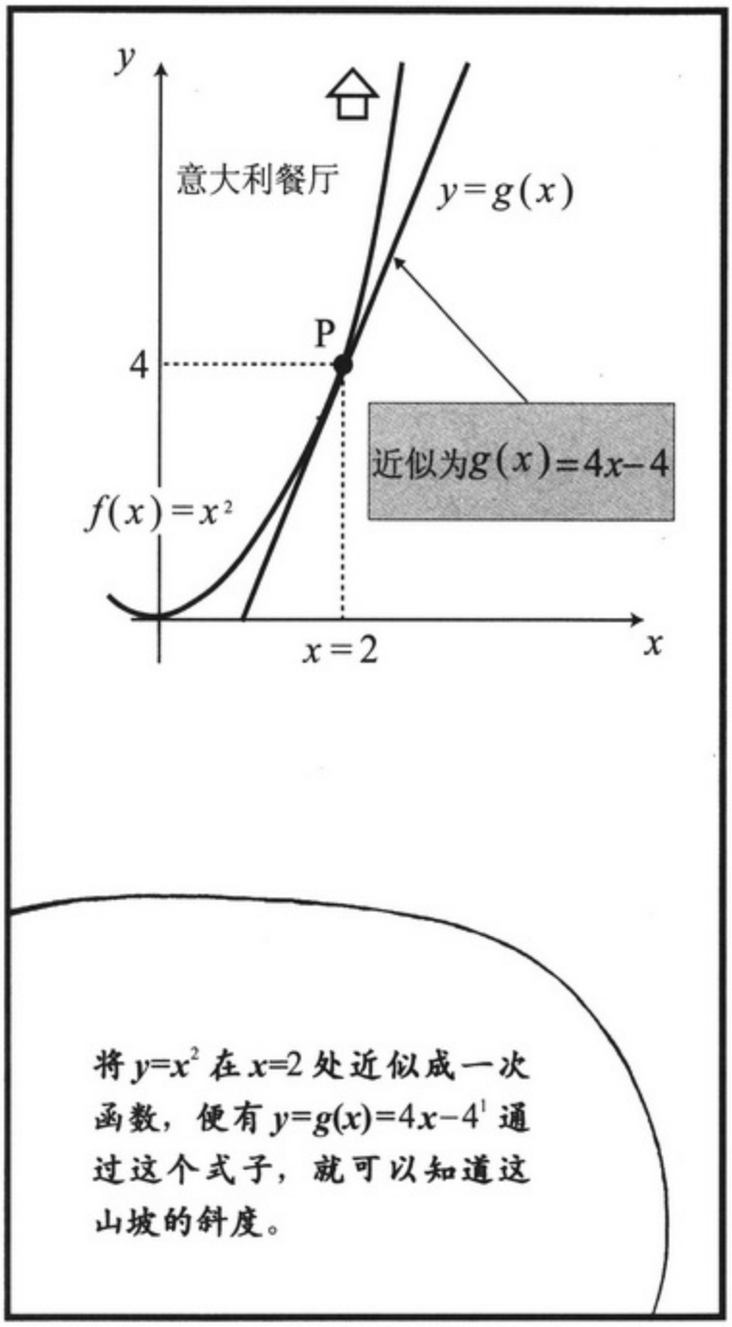




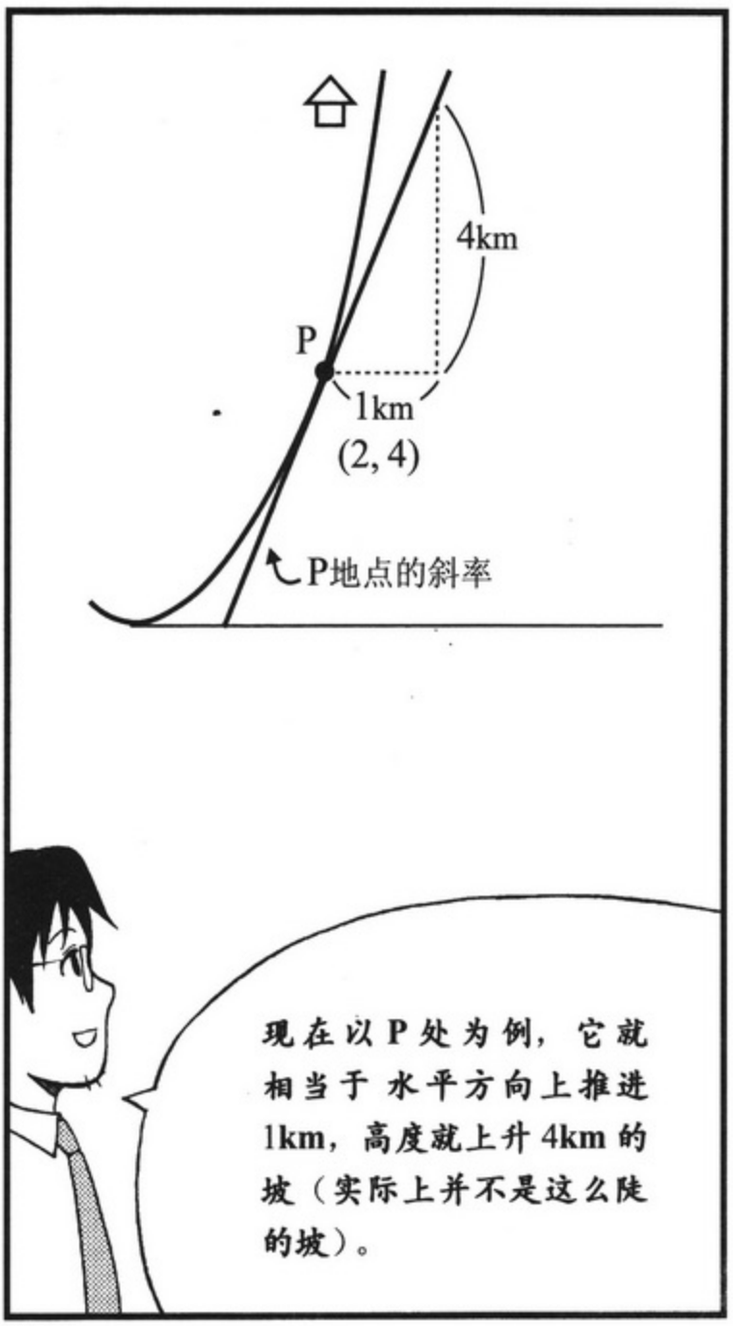




PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com




将$y=x^2$在$x=2$处近似成一次函数，便有$y=g(x)=4x-4$[1]通过这个式子，就可以知道这山坡的斜度。




现在以P处为例，它就相当于水平方向上推进1km，高度就上升4km的坡（实际上并不是这么陡的坡）。




1. 原因见第29页。


我的博客 http://book-life.blog.163.com

## 2 要注意误差率







$$\text{误差率}=\frac{(f\text{和}g\text{的差异})}{(x\text{的变化量})}$$

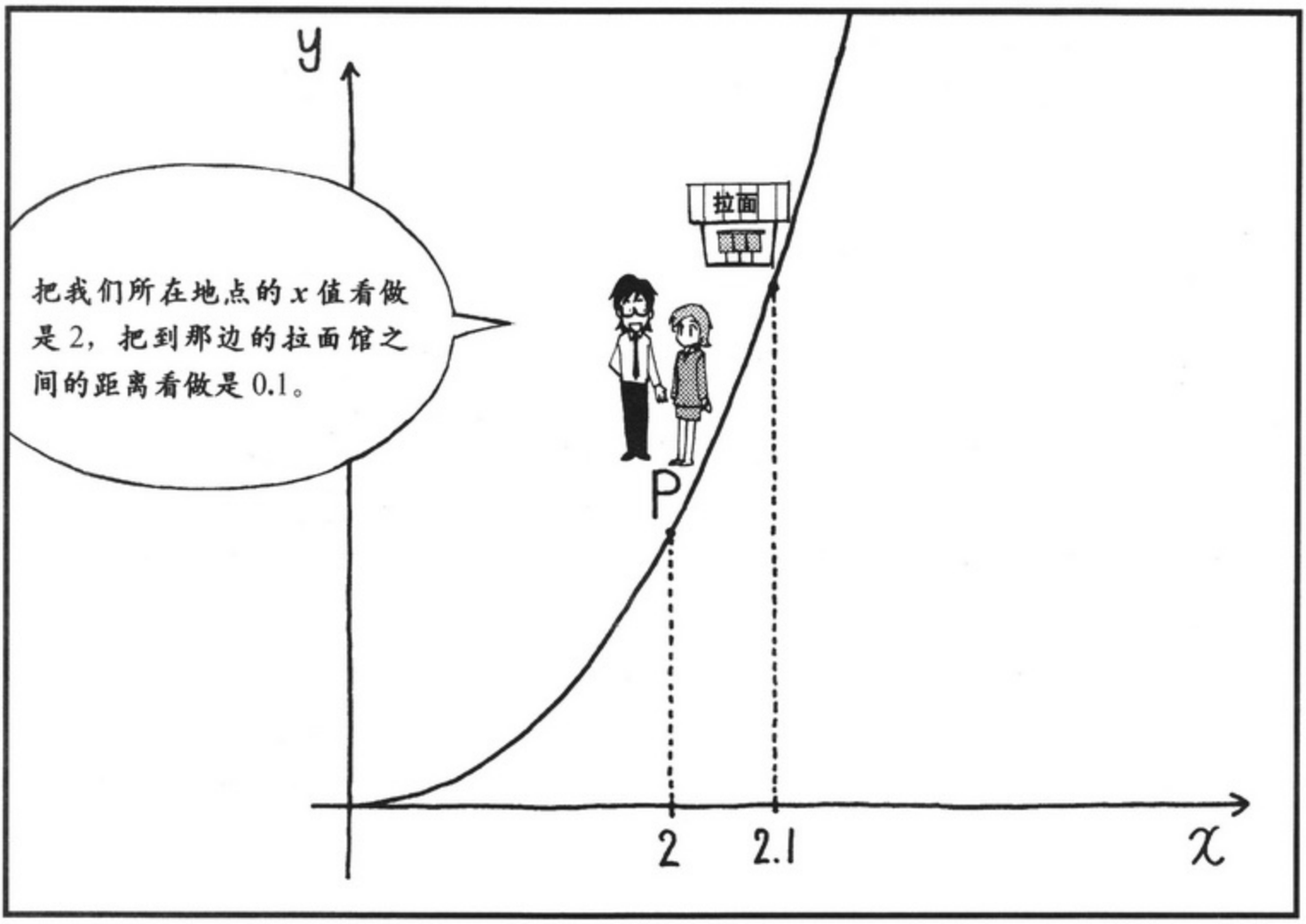
就是这样。







PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com




[$x=2 \rightarrow x=2.1$]
只是改变了 0.1。

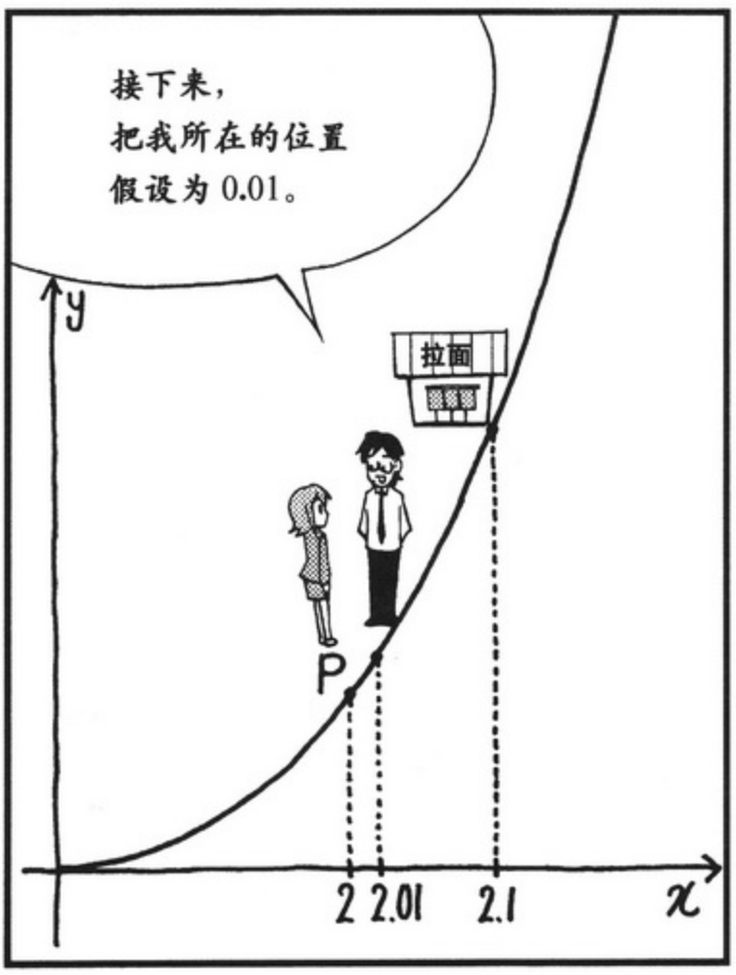
$$f(2.1) = 2.1^2 = 4.41$$

$$g(2.1) = 4 \times 2.1 - 4 = 4.4$$

所以，
（差异量）=（误差）=

$$f(2.1) - g(2.1) = 0.01$$

$$\text{误差率} = \frac{0.01}{0.1} = 0.1(=10\%)$$





我的博客 http://book-life.blog.163.com

[$x=2 \to x=2.01$]
改变了 0.01。

误差 $f(2.01)-g(2.01)=4.0401-4.04=0.0001$

误差率

$\frac{0.0001}{0.01}=0.01$

$=[1\%]$

拉面馆
的误差率
变小了啊！

也就是说，
离事故现场越近，
用 $g(x)$ 近似 $f(x)$
的效果就越好。



变化量 ⟶ 0　　则　　误差率 ⟶ 0

| $x$距离2的变化量 | $f(x)$ | $g(x)$ | 误　差 | 误差率 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 9 | 8 | 1 | 100% |
| 0.1 | 4.41 | 4.4 | 0.01 | 10% |
| 0.01 | 4.0401 | 4.04 | 0.0001 | 1% |
| 0.001 | 4.004001 | 4.004 | 0.000001 | 0.1% |
| ⋮ | | | | ⋮ |
| 0 | | | | 0 |

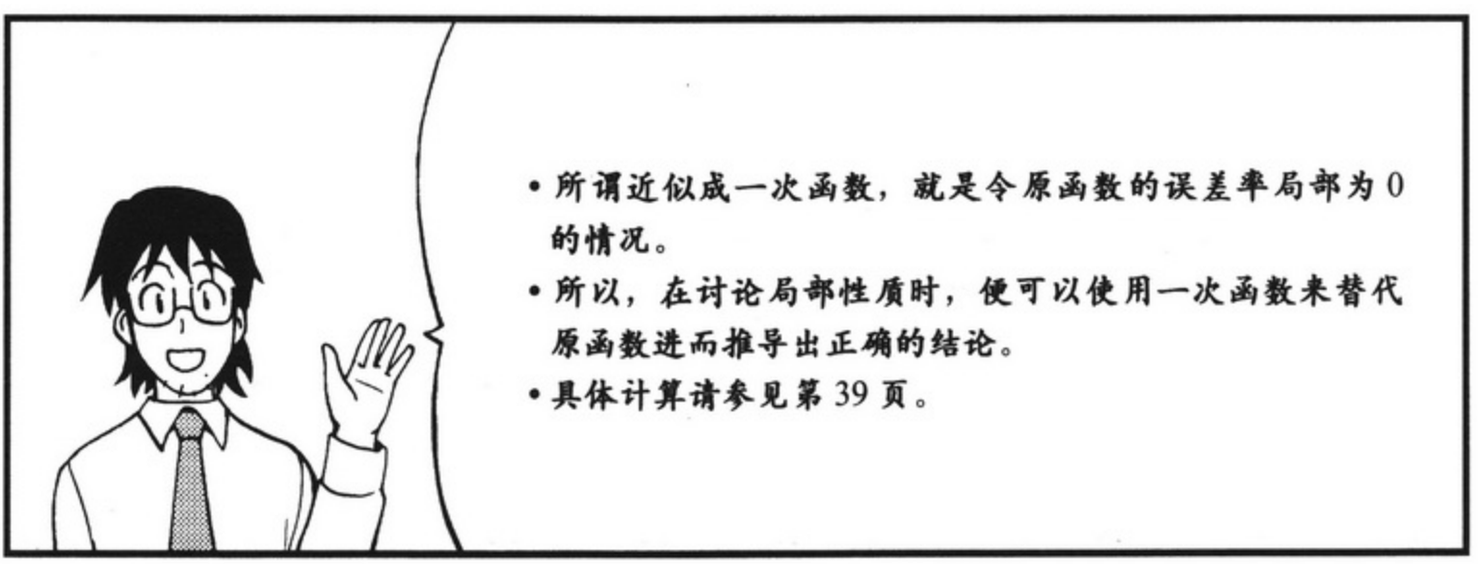
PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com







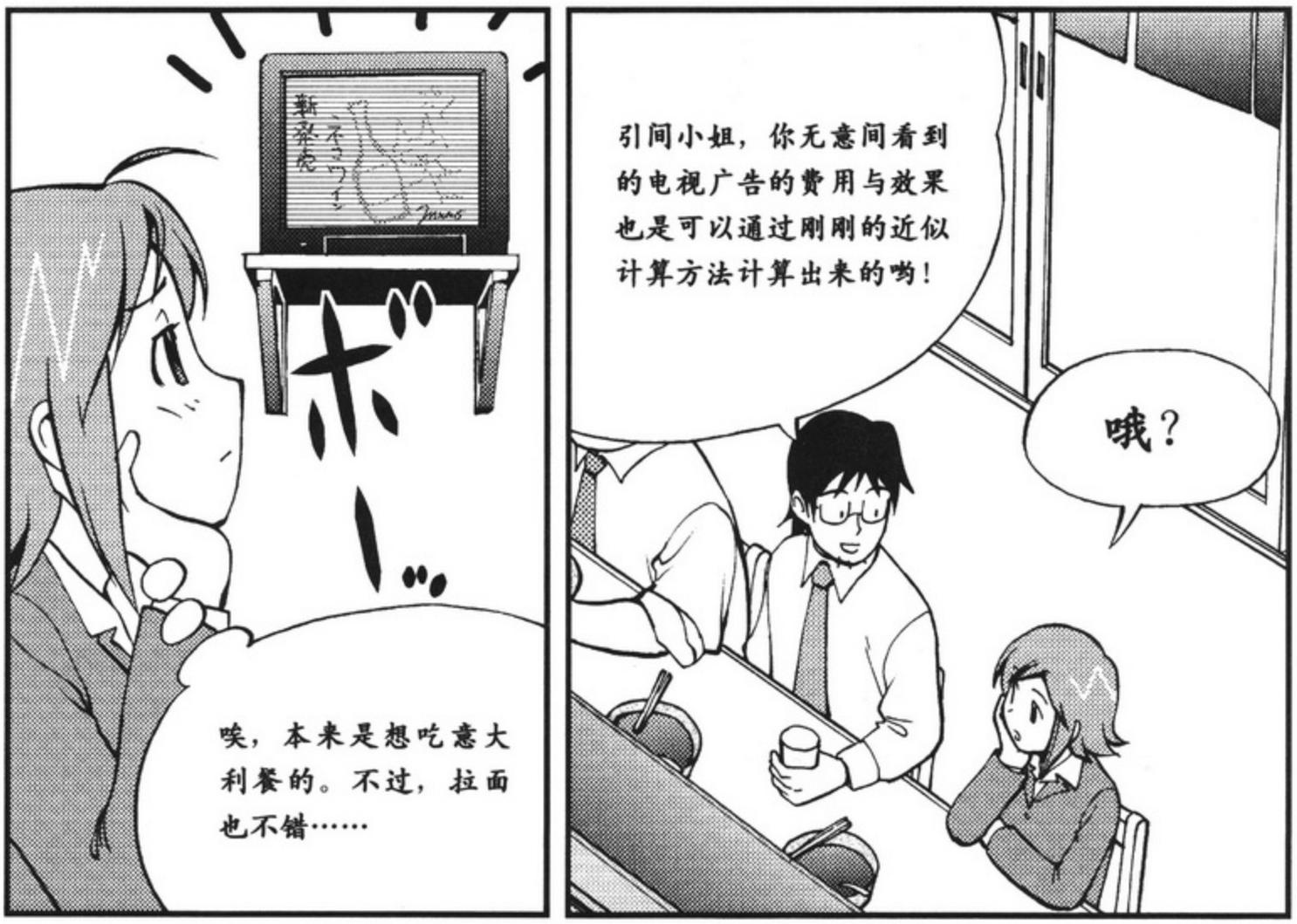




我的博客 http://book-life.blog.163.com




PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com

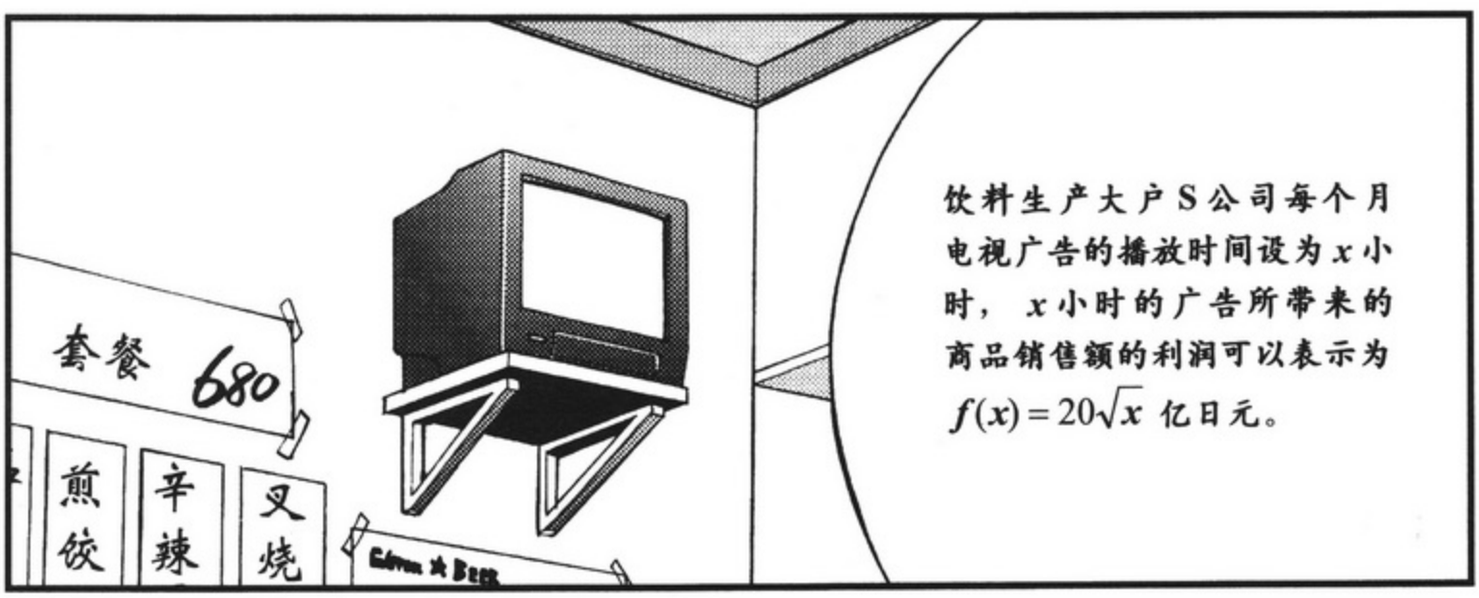
## 3 生活中也会用得到的函数











我的博客 http://book-life.blog.163.com

现在，S公司一个月累计播放广告4小时。



由此可知，

$f(4)=20\sqrt{4}=40$，

所以可以带来40亿日元的利润。

这里，依照广告播放合约，每分钟1000万日元。

每分钟广告=1000万日元

啊

1000万！？

$f(x)=20\sqrt{x}$亿日元

每分钟广告=1000万日元

那么，新就任的董事重新考虑了广告的播放时间。

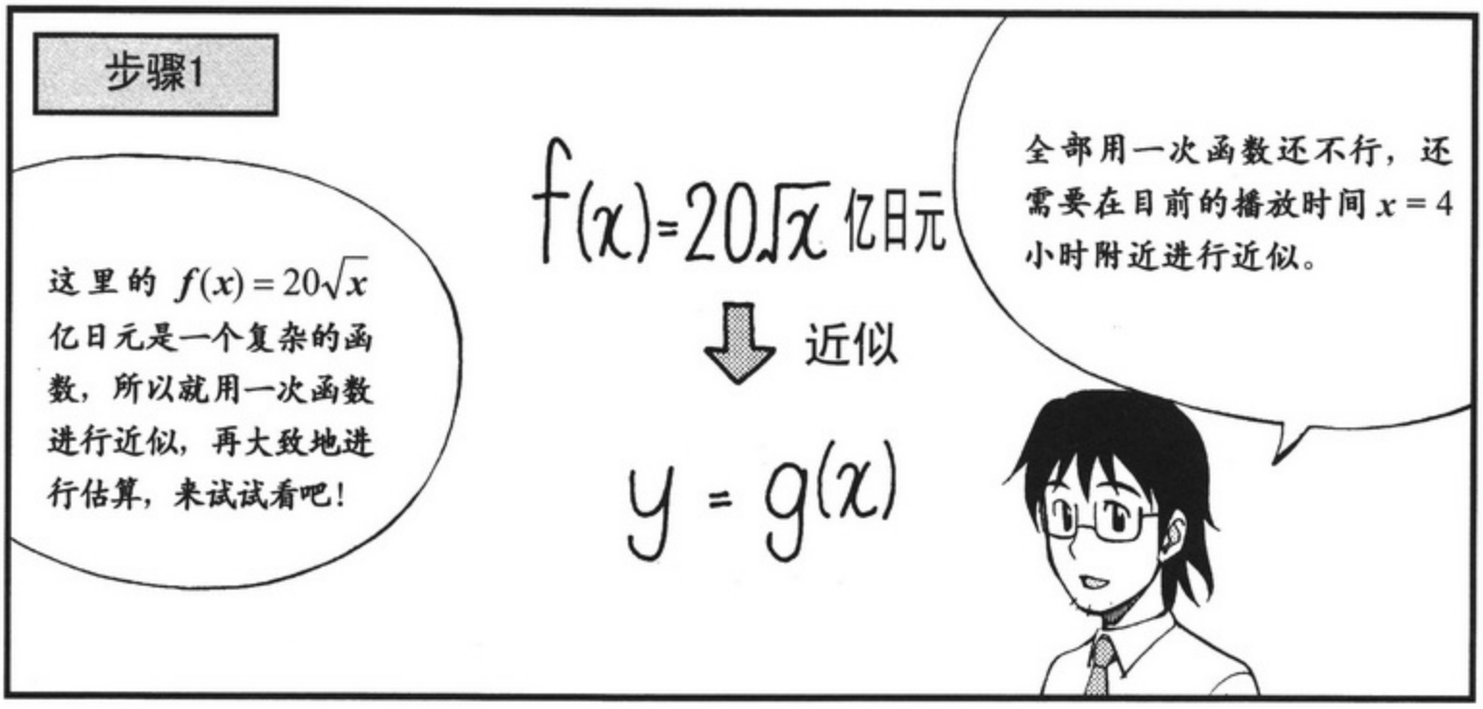
他会增加广告的播放时间，还是减少广告的播放时间呢？

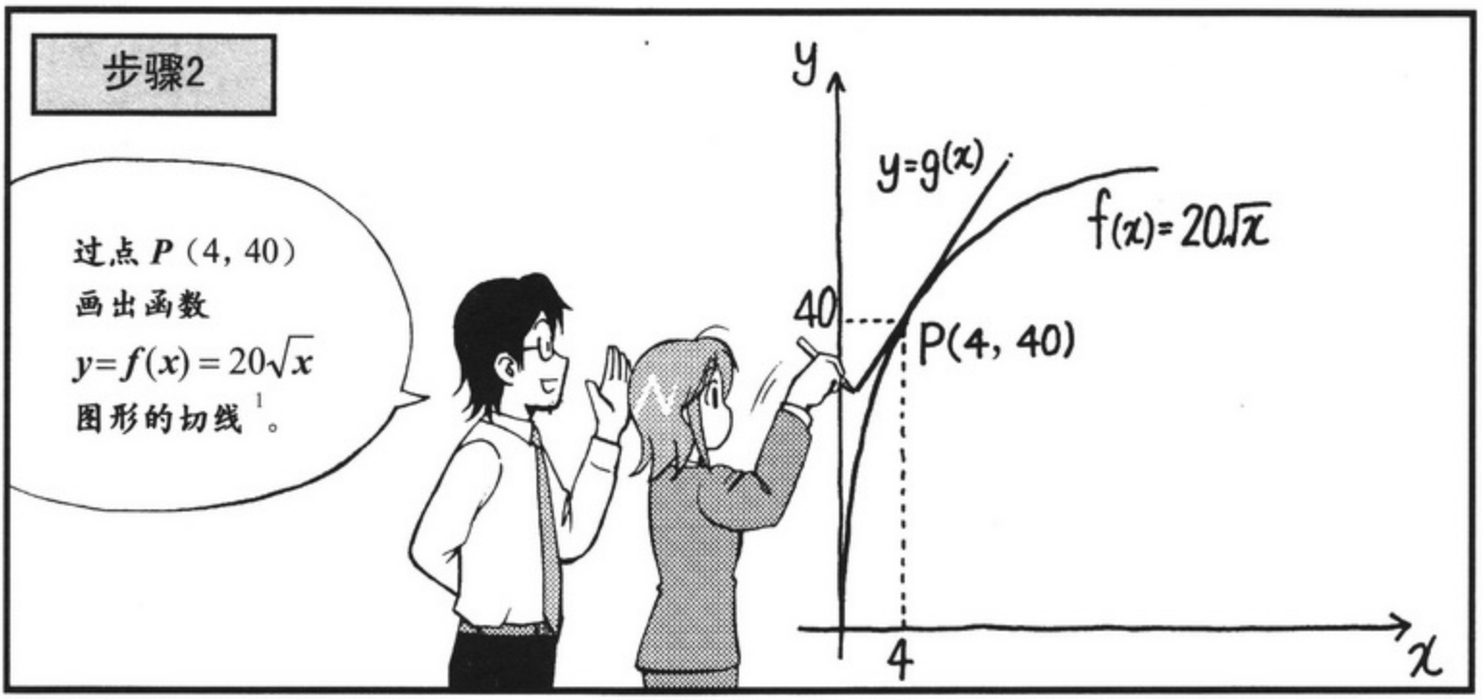


嗯？



PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com




对于 $f(x)=20\sqrt{x}$ 来说，$f'(4)$为

$$\frac{f(4+\varepsilon)-f(4)}{\varepsilon}=\frac{20\sqrt{4+\varepsilon}-20\times 2}{\varepsilon}=20\frac{(\sqrt{4+\varepsilon}-2)\times(\sqrt{4+\varepsilon}+2)}{\varepsilon\times(\sqrt{4+\varepsilon}+2)}$$

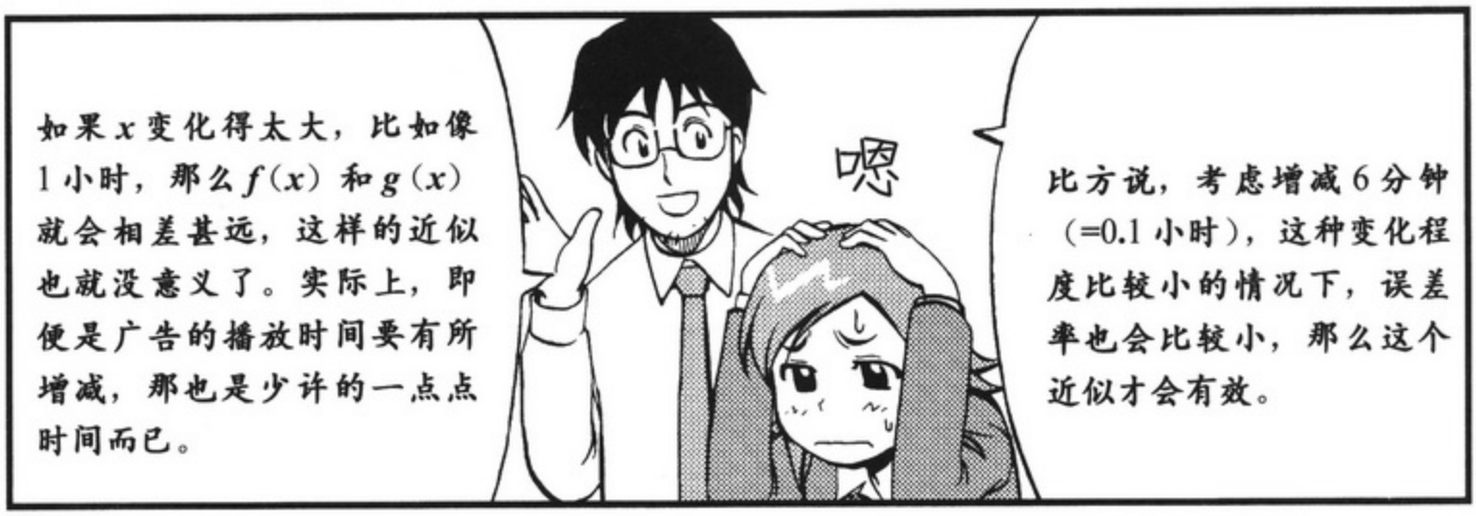
$$=20\frac{4+\varepsilon-4}{\varepsilon(\sqrt{4+\varepsilon}+2)}=\frac{20}{\sqrt{4+\varepsilon}+2}\quad\text{——}\quad(\text{☆})$$

当$\varepsilon\to 0$时，分母$=\sqrt{4+\varepsilon}+2\to 4$，于是(☆)$\longrightarrow\frac{20}{4}=5$

所以，近似一次函数 $g(x)=5(x-4)+40=5x+20$。

1. 切线的计算（也可以参见第39页中导函数的讲解内容）。

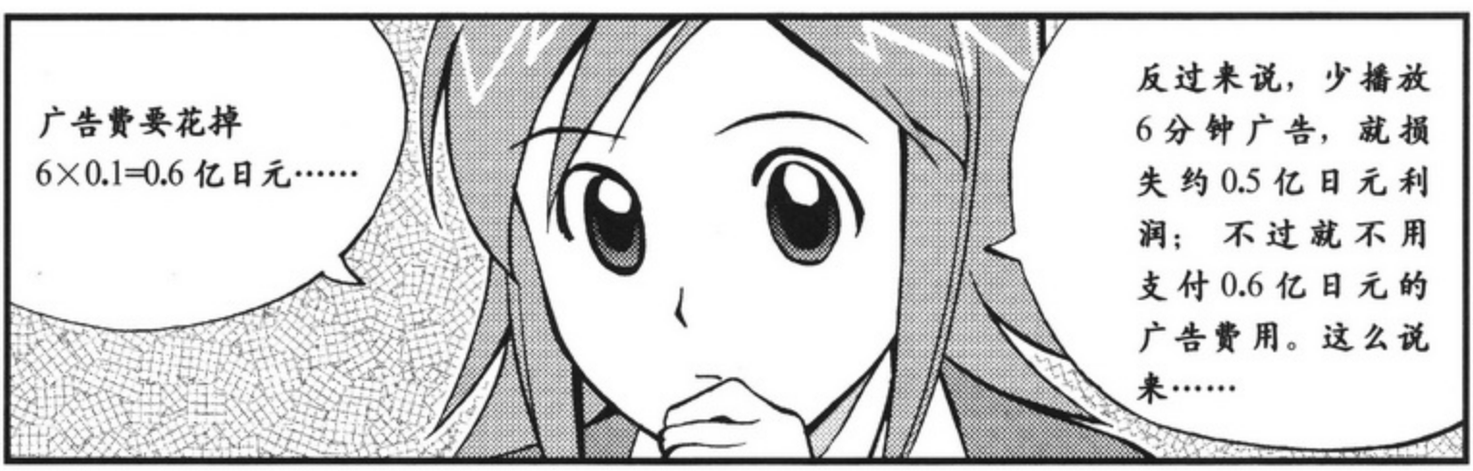

我的博客 http://book-life.blog.163.com










PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com









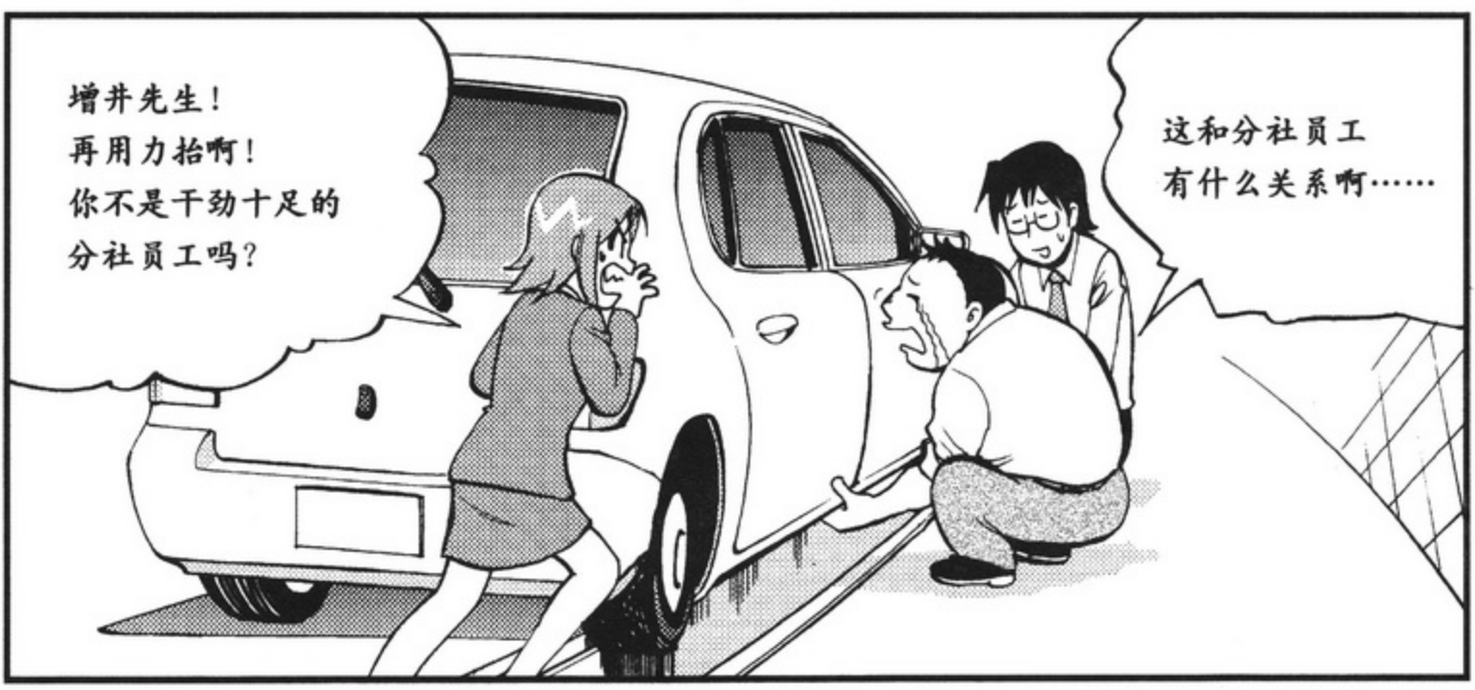


我的博客 http://book-life.blog.163.com




PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com





我的博客 http://book-life.blog.163.com

## 4 近似一次函数的求解方法

求出在 $x=a$ 处，用来近似函数 $f(x)$ 的一次函数 $g(x)=kx+l$。

只要求出斜率就可以了。

$g(x)=k(x-a)+f(a)$　　(当 $x=a$ 时，$g(x)$ 同 $f(a)$ 的值相同)……Ⓐ

接下来，先将 $x$ 的值从 $a$ 改变到 $a+$ ，再计算一下误差率。

$$(\text{误差率})=\frac{(\text{改变后的}f\text{与}g\text{的差异})}{\text{从}x=a\text{开始的改变量}}$$

$$=\frac{f(a+\varepsilon)-g(a+\varepsilon)}{\varepsilon}$$

$$=\frac{f(a+\varepsilon)-(k\varepsilon+f(a))}{\varepsilon}$$

← $g(a+\varepsilon)=k(a+\varepsilon-a)+f(a)$
$=k\varepsilon+f(a)$

$$=\frac{f(a+\varepsilon)-f(a)}{\varepsilon}-k\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}0$$

← $\varepsilon$ 趋近于0时，误差率也趋近于0

$$k=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(a+\varepsilon)-f(a)}{\varepsilon}$$

← $\varepsilon$ 趋近于0时，$\dfrac{f(a+\varepsilon)-f(a)}{\varepsilon}$ 的值趋近于 $k$

($\lim_{\varepsilon\to 0}$ 所表示的意思是，求出 $\varepsilon$ 趋近于0时式子的值)

根据这个 $k$，进一步可以得出如Ⓐ所示的 $g(x)$，也就是 $f(x)$ 的近似函数。

$k$ 被称为 $f(x)$ 在 $x=a$ 处的**微分系数**。

$\lim_{\varepsilon\to 0}\dfrac{f(a+\varepsilon)-f(a)}{\varepsilon}$　$y=f(x)$ 图形上各个点 $(a,\ f(a))$ 切线的斜率记作 $f'$，

即在 $f$ 上加一个撇号：

$$f'(a)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(a+\varepsilon)-f(a)}{\varepsilon}$$

($f'(a)$ 就是 $y=f(x)$ 在 $x=a$ 处切线的斜率。)

这里可以改为 $x$

$$\longrightarrow f'(x)$$

← 也可以将 $f'$ 看作是 $x$ 的函数，所以也可以说成“由函数 $f$ 导出的函数，即函数 $f$ 的**导函数**”。

PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com

## 小　结

- 微积分中进行极限计算的，仅仅是误差公式。
- 极限是用来求解微分系数的。
- 微分系数，就是所给出点的切线的斜率。
- 微分系数就是变化率。

$f'(a)$（$f(x)$ 在 $x=a$ 处的微分系数）通过 $\lim_{\varepsilon\to 0}\dfrac{f(a+\varepsilon)-f(a)}{\varepsilon}$ 进行计算。

$g(x)=f'(a)(x-a)+f(a)$，就是 $f(x)$ 的近似一次函数。

用来表示 $f(x)$ 上点 $(x, f(x))$ 切线的斜率的 $f'(x)$ 由 $f(x)$ 导出，所以称为 $f(x)$ 的导函数。

此外，由 $y=f(x)$ 求解导函数 $f'(x)$ 的过程称为**微分**。$y=f(x)$ 的导函数的符号，除 $f'(x)$ 外，还可以使用如下形式：

$$y',\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\ \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x},\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$$

### 求解常数函数[1]、一次函数[2]、二次函数的导函数[3]

(1) 求常数函数 $f(x)=\alpha$ 的导函数。$x=a$ 处的微分系数为

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(a+\varepsilon)-f(a)}{\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\alpha-\alpha}{\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to 0}0=0$$

因此，$f(x)$ 的导函数为 $f'(x)=0$

(2) 求一次函数 $f(x)=\alpha x+\beta$ 的导函数。$x=a$ 处的微分系数为

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(a+\varepsilon)-f(a)}{\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\alpha(a+\varepsilon)+\beta-(a\alpha+\beta)}{\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to 0}\alpha=\alpha$$

因此，$f(x)$ 的导函数为 $f'(x)=\alpha$

1. 常数函数：Constant Function。
2. 一次函数：Linear Function。
3. 二次函数：Quadratic Function。


我的博客 http://book-life.blog.163.com

(3) 漫画中出现过的函数 $f(x)=x^2$ 的导函数通常这样求。$x=a$ 处的微分系数为：

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(a+\varepsilon)-f(a)}{\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(a+\varepsilon)^2-a^2}{\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{2a\varepsilon+\varepsilon^2}{\varepsilon}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}(2a+\varepsilon)=2a$$

于是，在 $x=a$ 处的微分系数为 $2a$，记作：$f'(a)=2a$。因此，$f(x)$ 的导函数为 $f'(x)=2x$。

## 第1章 本章习题

**1.** 已知函数 $f(x)$ 和 $g(x)=8x+10$，当 $x$ 趋近于 5 时，这两个函数的误差率趋近于 0。

(1) 求 $f(5)$，　(2) 求 $f'(5)$。

**2.** 已知 $f(x)=x^3$，求导函数 $f'(x)$。

PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com

我的博客 http://book-life.blog.163.com

# 第2章
# 掌握微分的技巧



PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com





我的博客 http://book-life.blog.163.com
















PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com





我的博客 http://book-life.blog.163.com















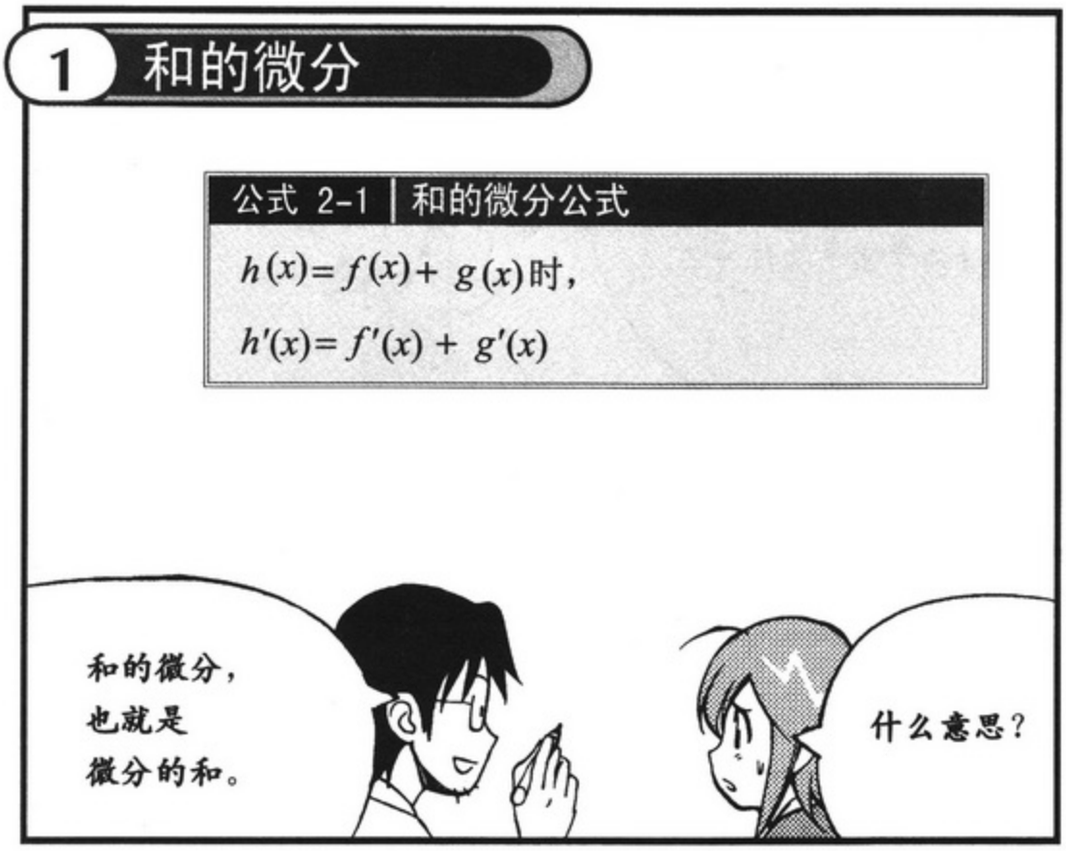

PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com

## 1 和的微分

**公式 2-1 | 和的微分公式**

$h(x)=f(x)+g(x)$时，

$h'(x)=f'(x)+g'(x)$







$$f(x) \underset{\text{近似}}{\sim} f'(a)(x-a)+f(a) \quad -①$$

$$g(x) \underset{\text{近似}}{\sim} g'(a)(x-a)+g(a) \quad -②$$

咔





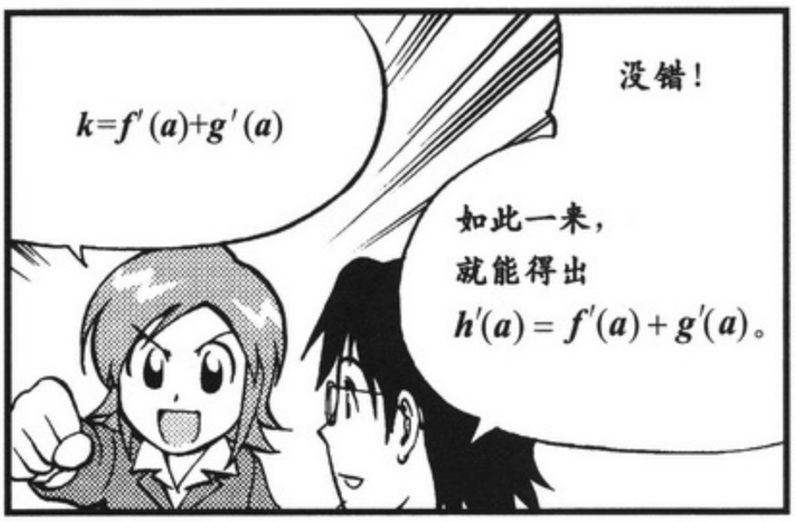


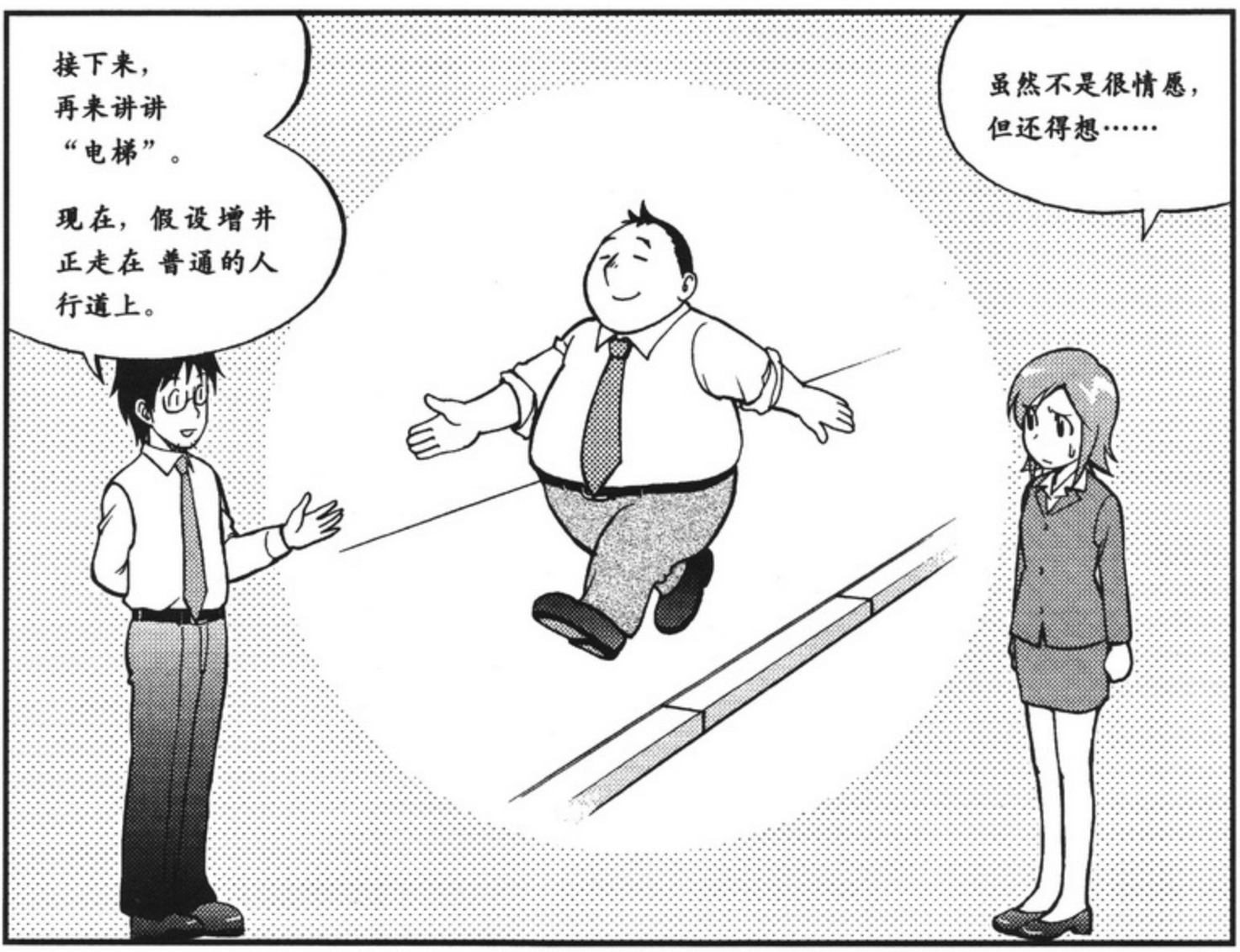

我的博客 http://book-life.blog.163.com

于是，有……

$$h(x) \sim f'(a)(x-a)+f(a)+g'(a)(x-a)+g(a) \quad \text{—④}$$



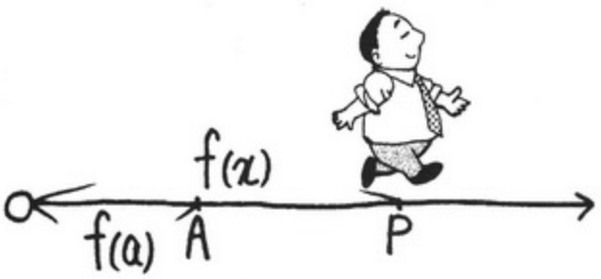

PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com

从出发点0处开始测量，增井在$x$小时后所移动的距离为$f(x)$km。

$a$小时后，增井移动到了A地点。




$x$小时之后，到达了位置P。




所以，在$x-a$这段时间里，增井从A移动到P。



是这样的，没错，不过那又能怎样呢？

把这段移动时间$x-a$看做是很短的时间。

$$f(x) \sim f'(a)(x-a)+f(a)$$

近似



可以做如下变形：

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \sim f'(a)$$

近似

关社长，这式子的左边是(移动距离)÷(移动时间)这样的话……不就是速度了吗？



没错，也就是说$f'(a)$表示的是增井经过点A时的速度。



我的博客 http://book-life.blog.163.com

那就是说，对表示距离的函数 $f(x)$ 进行微分，就可以得到速度。

哈哈哈

是那样的，那么，如果是 $h(x)=f(x)+g(x)$ 的时候，$h'(x)=f'(x)+g'(x)$ 就表示下面的意思了。

这次换成在电梯上走。

电梯 $x$ 分钟内移动 $f(x)$m，在这个电梯上测量，增井 $x$ 分钟移动了 $g(x)$m。

$x$分钟内移动$g(x)$m

$x$分钟内移动$f(x)$m

那么，增井在 $x$ 分钟内移动的距离就变成 $h(x)=f(x)+g(x)$。

PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com





我的博客 http://book-life.blog.163.com

## 2 积的微分

**公式 2-2 | 积的微分公式**

当 $h(x)=f(x)g(x)$ 时，

$$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

积的微分就是逐一进行微分后再彼此相加。





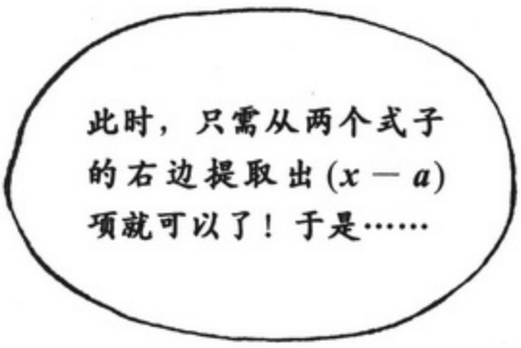


$$f(x) \sim f'(a)(x-a)+f(a)$$
近似

$$g(x) \sim g'(a)(x-a)+g(a)$$
近似

$$h(x)=f(x)\,g(x) \sim k(x-a)+l$$

$$h(x) \sim \{f'(a)(x-a)+f(a)\}\{g'(a)(x-a)+g(a)\}$$




$$\{f'(a)g(a)+f(a)g'(a)\}(x-a) \sim k(x-a)$$

$$k=f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$$



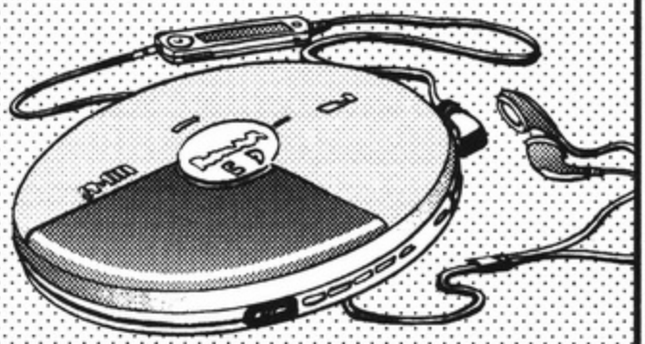

PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com




1. 实际上，音像出租店中也有比较有名的连锁店，对于任何商品来说都是有知名品牌的，完全竞争市场是不存在的。所以说，所谓的完全竞争市场只是虚构的理想状态而已。


我的博客 http://book-life.blog.163.com

例如，某生产CD播放机的企业正在考虑是否会进一步增产，该播放器的市场价格为每台12 000日元。



增产的费用是每台1万日元的话，那么这个企业就会增产。毕竟是有利可图嘛……




由于很多企业生产同样的产品，所以该公司并不认为其所增产的程度会引起商品价格的下跌。

不过，由于增产所导致的生产效率逐渐下降，该企业每增产1台的成本早晚有一天会与市场价格12 000日元相同。在此基础上再继续增产的话，就不划算了，因此产量会固定下来。




与之相比，仅由一家公司独家供应某商品而产生的所谓的“垄断市场”，其情况就有所不同了。

由于供应此商品的公司只有这一家，增加产量的话就会导致价格下跌。




PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com

现在，假设产量仅为 $x$，并且在供应时能够全部售出，其售出价格 $P$ 的函数为 $P(x)$。

顺便说一下，此时 $x$ 增加的话价格就会下跌，用来表示价格变化的 $P'(x)$ 是负值。

没错！
此时的销售额就是这样。

呵呵

$$\text{销售额}=h(x)=\text{价格}\times\text{供应量}=P(x)\times x$$

**公式 2-3**

由于 $h(x)\sim h'(a)(x-a)+h(a)$

$h(x)-h(a)\sim h'(a)(x-a)$

$h(x)-h(a)$：新增加的销售额　　$(x-a)$：增加的产量

由此可知，每增产一台获得的新增销售额为 $h'(a)$。

我明白了！我们将这个与生产费用进行比较，再决定是否增产就可以了。

是这样！
这里的 $h(x)=P(x)x$，
所以回忆一下，
刚刚讲的积的微分。

就是逐一微分，对吧！



我的博客 http://book-life.blog.163.com
















1. $x$的微分为1(参见第40页)。

PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com

(再增产1台的时候，销售额的增量)

$$=h'(a)=P'(a)a+P(a)$$

上式中的后两项：

$P(a)$是再增产1台时所能获得的销售额。

$P'(a)a$=(价格下跌的程度)×生产台数→这就意味着价格的下跌会使全部生产的商品遭受损失。








我的博客 http://book-life.blog.163.com




PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com






















我的博客 http://book-life.blog.163.com




PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com

## 3 多项式的微分




**公式 2-4 | 幂函数的导数**

$h(x)=x^n$ 的导数为 $h'(x)=nx^{n-1}$

为什么会这样呢？只要反复使用积的微分公式就可以了。

当 $h(x)=x^2$ 时，可以变形为 $h(x)=x\times x$，所以 $h'(x)=x\times 1+1\times x=2x$

确实符合上述公式。

使用这个

当 $h(x)=x^3$ 时，可以变形为 $h(x)=x^2\times x$

所以 $h'(x)=(x^2)'\times x+x^2\times(x)'=(2x)x+x^2\times 1=3x^2$

使用这个

确实符合上述公式。

当 $h(x)=x^4$ 时，可以变形为 $h(x)=x^3\times x$

所以 $h'(x)=(x^3)'\times x+x^3\times(x)'=3x^2\times x+x^3\times 1=4x^3$

确实符合上述公式。

依此类推，只要将以下三个公式联合起来使用，就一定能对多项式进行微分。

**公式 2-5 | 和、常数倍、$x^n$ 的微分公式**

| | | |
|---|---|---|
| 和的微分公式 | $\{f(x)+g(x)\}'=f'(x)+g'(x)$ | ——① |
| 常系数微分公式 | $\{\alpha f(x)\}'=\alpha f'(x)$ | ——② |
| $x^n$的微分公式 | $\{x^n\}'=nx^{n-1}$ | ——③ |

例 试着对 $h(x)=x^3+2x^2+5x+3$ 进行微分。

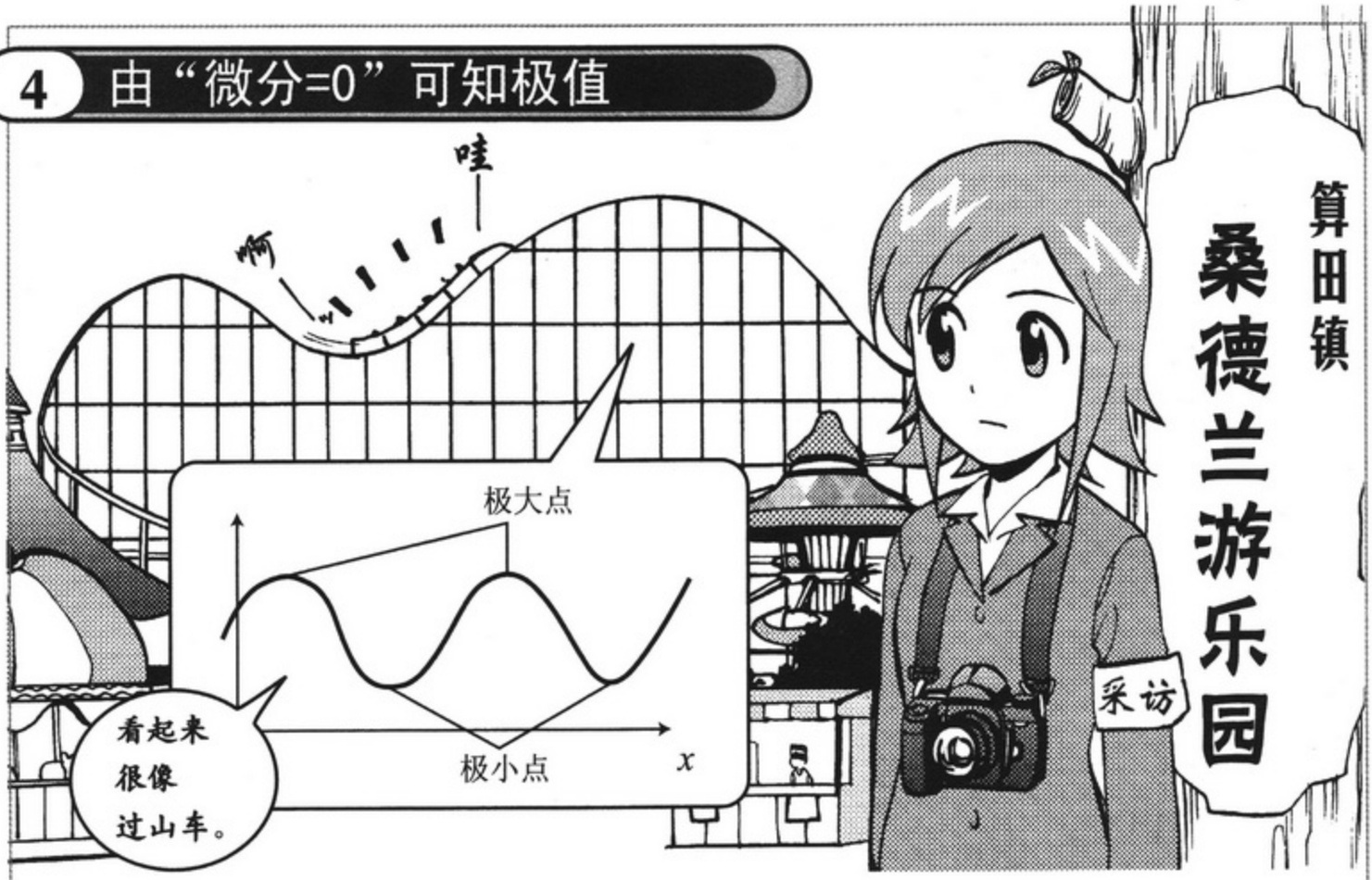
$$h'(x)=\{x^3+2x^2+5x+3\}'\overset{①}{=}(x^3)'+(2x^2)'+(5x)'+(3)'$$
$$\overset{②}{=}(x^3)'+2(x^2)'+5(x)'\overset{③}{=}3x^2+2(2x)+5\times 1=3x^2+4x+5$$


我的博客 http://book-life.blog.163.com




PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com

## 4 由“微分=0”可知极值




极大点和极小点是函数增减性发生变化的地方，对研究函数的性质来说是很重要的。极大点、极小点常常会变成最大点、最小点，是求解某些(最优解)问题时十分关键的点。

**定理 2-1 (极值条件)**

$y=f(x)$ 在 $x=a$ 处为极大点或极小点，则有 $f'(a)=0$。

也就是说，求极大点、极小点时，只需要找到满足 $f'(a)=0$ 的 $a$ 就可以了。



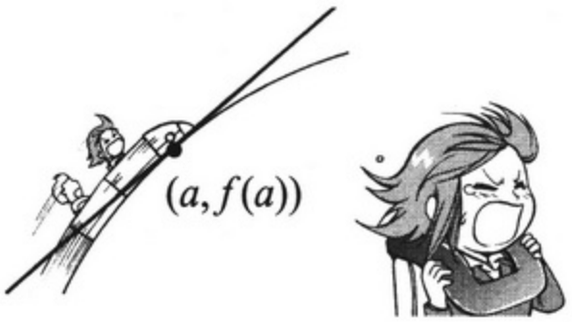


我的博客 http://book-life.blog.163.com

现在，令 $f'(a)$ 的值不等于 0，我们来看看 $f'(a)>0$ 时的情况。

在 $x=a$ 附近，有 $f(x)\sim f'(a)(x-a)+f(a)$。因此，

当 $f'(a)>0$ 时，所近似的一次函数在 $x=a$ 处呈现递增的趋势，因此可知 $f(x)$ 也同样呈递增趋势。就是说，过山车处于上升的状态，既没在轨道的顶端，也没在谷底。




同样，当 $f'(a)<0$ 时，$y=f(x)$ 处于下降的状态，既不在顶端，也不在谷底。

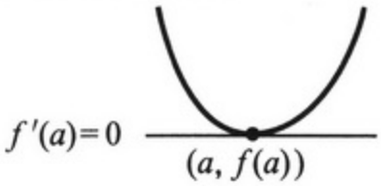


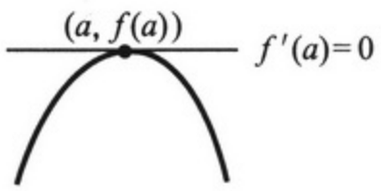

如果说 $f'(a)>0$ 和 $f'(a)<0$ 分别对应着上升和下降的状态，那么顶端或谷底所对应的只能是 $f'(a)=0$ 了。

实际上，如果 $f'(a)=0$ 的话，所近似的一次函数

$$y=f'(a)(x-a)+f(a)=0\times(x-a)+f(a)$$

为水平直线，与图形相吻合。







**定理 2-2　(增减性的判定条件)**

当 $f'(a)>0$ 时，在 $x=a$ 附近 $y=f(x)$ 呈递增趋势。

当 $f'(a)<0$ 时，在 $x=a$ 附近 $y=f(x)$ 呈递减趋势。

PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com





我的博客 http://book-life.blog.163.com

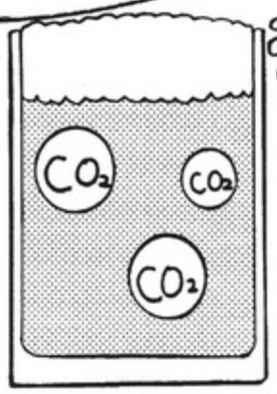



PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com

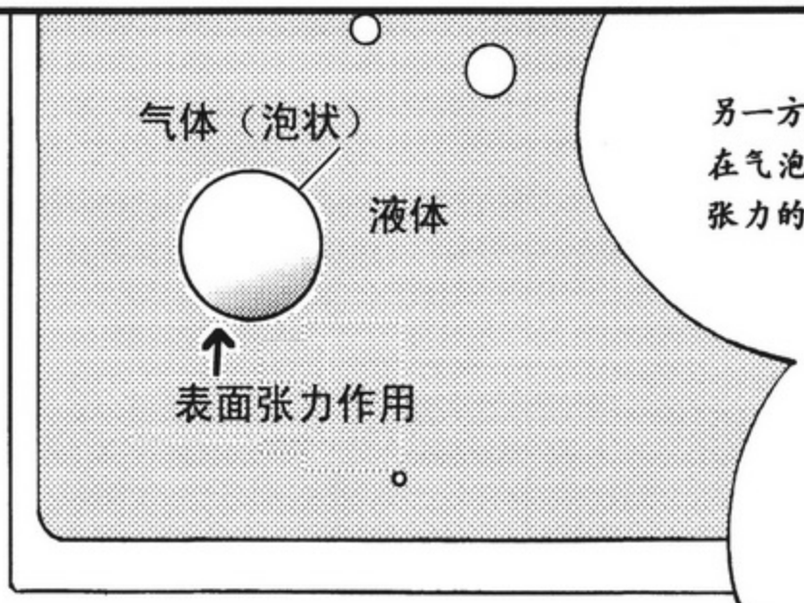
微笑……

冷不防来了这么一招。

啤酒是一种碳酸饮料，其中的二氧化碳呈过饱和状态，与溶解于液体中相比，气体状态下的二氧化碳更为稳定。




因此，气泡的能量同它的体积 $\frac{4}{3}\pi r^3$（$r$ 为半径）成反比。




另一方面，在气泡和液体的交界面，表面张力的作用会使表面积减小。

所以，气泡的能量同它的表面积 $4\pi r^2$ 成正比。

根据以上两种效果，半径为 $r$ 的气泡所具有的能量 $E(r)$ 为：

$$E(r)=\underbrace{-a\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)}_{\text{体积项}}+\underbrace{b(4\pi r^2)}_{\text{表面积项}}$$

球的体积公式

球的表面积公式

……由此进行表示。


我的博客 http://book-life.blog.163.com



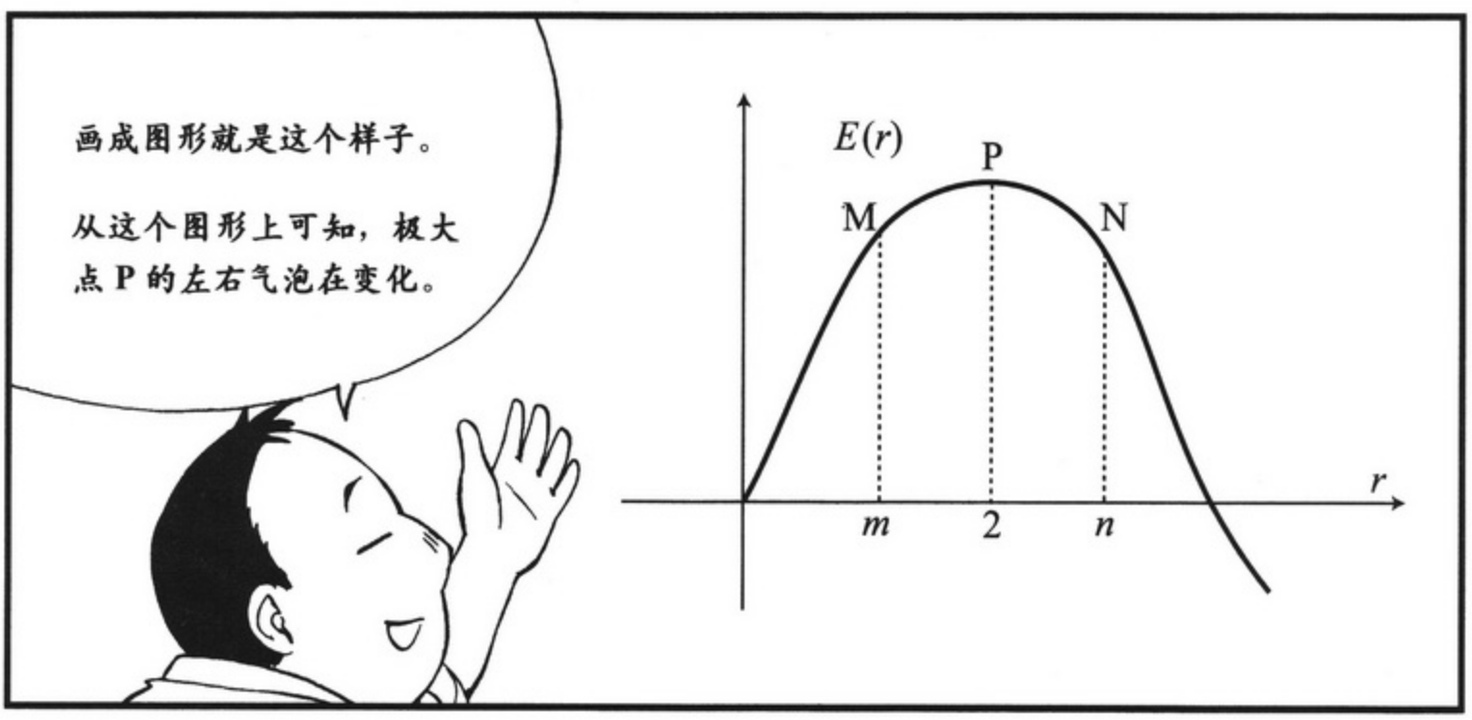




$$E(r)' = (-r^3)' + (3r^2)'$$
$$= -3r^2 + 6r$$
$$= -3r(r-2)$$

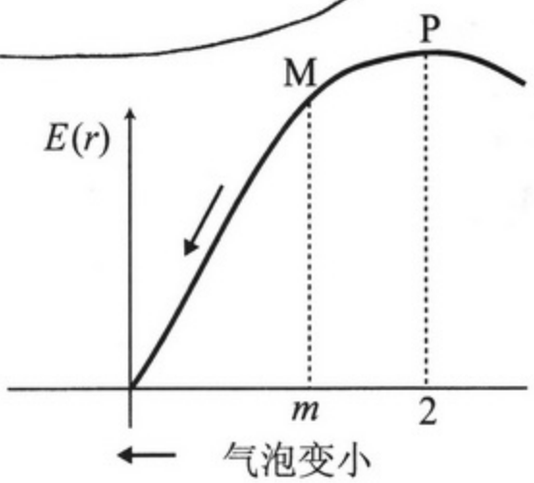
因此 $r=2$ 时，$E'(r)=0$。

当 $0<r<2$ 时，$E'(r)>0$，
当 $2<r$ 时，$E'(r)<0$，
由此可知，在 $r=2$ 处，
$E(r)$ 为极大点 P。

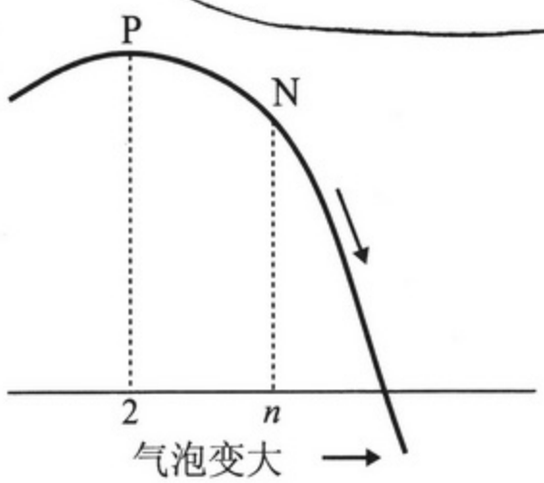


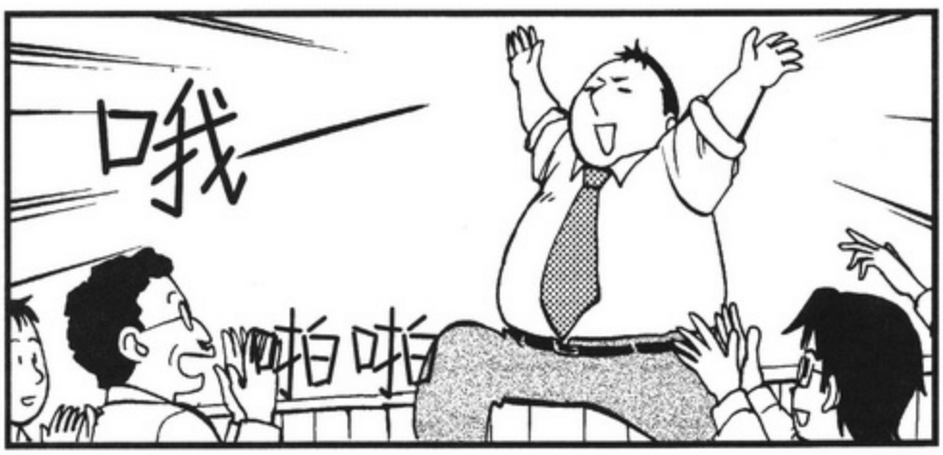

PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com

半径和能量处于点M所示状态下的气泡，若要减少气泡的能量$E(r)$，其半径就应当从$m$开始变小，气泡逐渐变小直至消失。



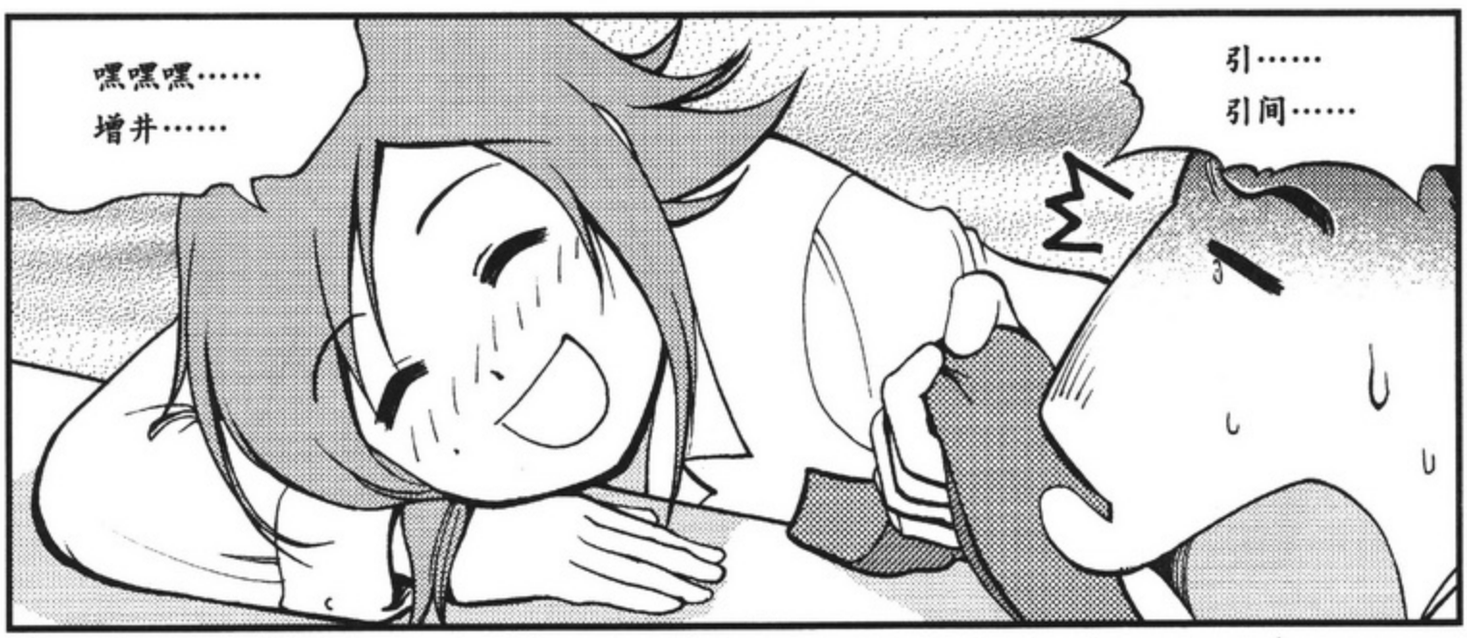

反之，半径和能量处于点N所示状态下的气泡，若要减少气泡的能量$E(r)$，其半径就应当从$n$开始变大，不断膨胀起来，在啤酒中逐渐上升。











我的博客 http://book-life.blog.163.com




PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com

## 5 平均值定理

所谓微分，就是在 $x=a$ 附近，将 $f(x)$ 近似成一次函数时 $x$ 的系数。即

$$f(x) \underset{\text{近似}}{\sim} f'(a)(x-a)+f(a) \quad (x \text{ 在 } a \text{ 附近})$$

但是，说到底这只不过是“近似相等”、“模拟”而已，对于位于 $a$ 附近的 $b$ 来说，一般会有

$$f(b) \neq f'(a)(b-a)+f(a) \quad \text{— ①}$$

两者之间完全一致的情况是不存在的。



以下定理是为了求知欲旺盛的读者所准备的。

**定理 2-3 平均值定理**[1]

对于 $a$，$b(a<b)$ 来说，存在一个 $\zeta$，当 $a<\zeta<b$ 时，

满足 $f(b)=f'(\zeta)(b-a)+f(a)$。

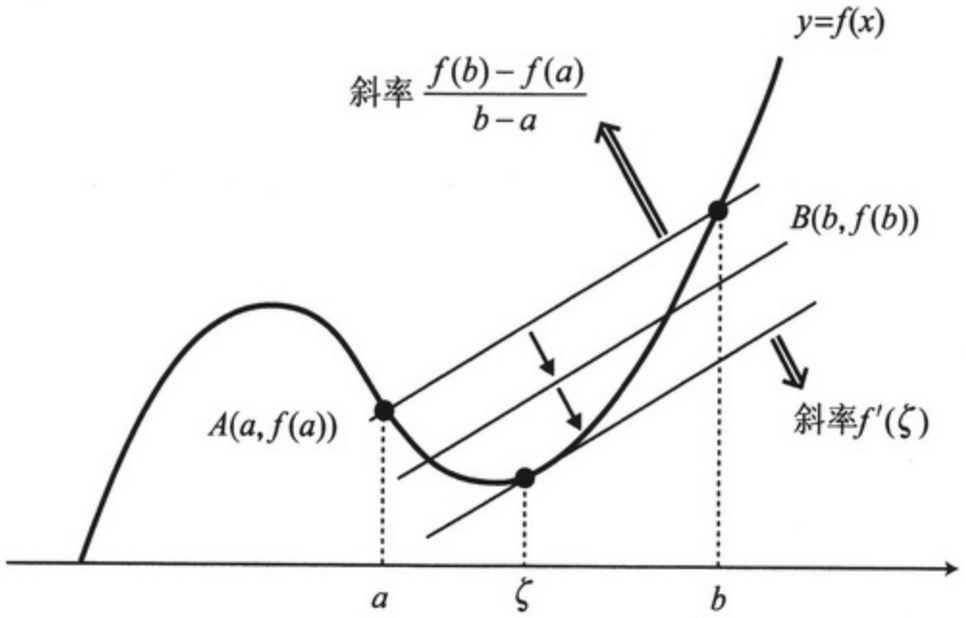
也就是说，不是 $f'(a)$，而是从 $a$ 向 $b$ 增加的过程中的 $\zeta$，其微分值 $f'(\zeta)$，能够使式子①中的等号成立。




1. 平均值定理：Mean Value Theorem。


我的博客 http://book-life.blog.163.com

连接 $A(a,\ f(a))$，$B(b,\ f(b))$两点，得到线段 $AB$



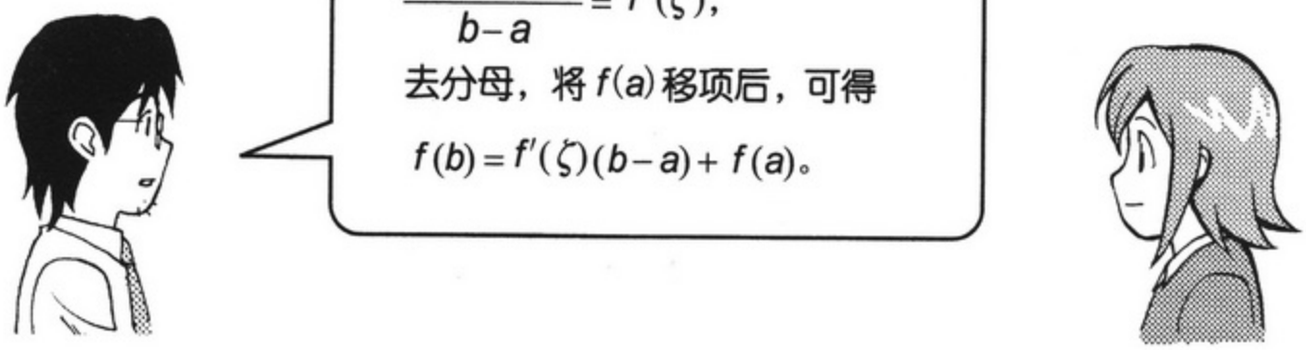

于是有，(AB的斜率) $=\left(\frac{y\text{的增量}}{x\text{的增量}}\right)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ——②

然后按照图上的方式将 AB 做平移。

我们终归会看到直线即将脱离图像的那一瞬间，将这一点设为$(\zeta,\ f(\zeta))$。

此时，这条直线也就成为图形的切线，其斜率为 $f'(\zeta)$。

由于进行的是平移，所以 $f'(\zeta)$的值应该与式子②的斜率相等。




PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com

**商的微分公式**

求 $h(x)=\dfrac{g(x)}{f(x)}$ 的导函数公式。

首先，我们来求一下 $f(x)$ 的倒数——函数 $p(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ 的导函数。在 $x=a$ 附近，有 $f(x)\sim f'(a)(x-a)+f(a)$，同理，有

$$p(x)\sim p'(a)(x-a)+p(a)$$

此时，必须注意到 $f(x)p(x)\equiv 1$。

所以，$1=f(x)\,p(x)\sim\{f'(a)(x-a)+f(a)\}\{p'(a)(x-a)+p(a)\}$ 从右边提取出 $(x-a)$ 的系数，则右式为

$$p(a)f'(a)+f(a)p'(a)$$

由于其左边并不存在 $x$ 项，所以等于 0。因此，有

$$p'(a)=-\frac{p(a)f'(a)}{f(a)}$$

又由于 $p(a)=\dfrac{1}{f(a)}$，将其代入分子的 $p(a)$ 中，可得

$$p'(a)=-\frac{f'(a)}{f(a)^2}$$

然后，对于 $h(x)=\dfrac{g(x)}{f(x)}$ 来说，可以变形为 $h(x)=g(x)\times\dfrac{1}{f(x)}=g(x)p(x)$，对变形后的式子使用积的微分公式即可。

$$h'(x)=g'(x)p(x)+g(x)p'(x)=g'(x)\frac{1}{f(x)}-g(x)\frac{f'(x)}{f(x)^2}$$

$$=\frac{g'(x)f(x)-g(x)f'(g)}{f(x)^2}$$

进而可以得到接下来的公式。


我的博客 http://book-life.blog.163.com

**公式 2-6 | 商的微分公式**

$$h'(x)=\frac{g'(x)f(x)-g(x)f'(g)}{f(x)^2}$$

**复合函数的微分公式**

求 $h(x)=g(f(x))$ 的导函数公式。

在 $x=a$ 附近，有 $f(x)-f(a)\sim f'(a)(x-a)$ — ①，并且

在 $y=b$ 附近，有 $g(y)-g(b)\sim g'(b)(y-b)$ — ②

于是，令 $b=f(a)$，$y=f(x)$，改写②式，在 $x=a$ 附近，有 $g(f(x))-g(f(a))\sim g'(f(a))(f(x)-f(a))$。将上式右边的 $f(x)-f(a)$ 替换为①式的右边，可得

$$g(f(x))-g(f(a))\sim g'(f(a))f'(a)(x-a)$$

又由于 $g(f(x))=h(x)$，所以上式可以写成

$h'(a)=g'(f(a))f'(a)$。进而可以得到接下来的公式。

**公式 2-7 | 复合函数的微分公式**

$$h'(x)=g'(f(x))f'(x)$$

**反函数[1]的微分公式**

使用这一公式，我们可以得出 $y=f(x)$ 的反函数 $x=g(y)$ 的微分公式。对于任意 $x$ 都存在 $x=g(f(x))$，所以对等式两边进行微分，可得

$$1=g'(f(x))f'(x)$$

因此，有 $1=g'(y)f'(x)$，就可以得到接下来的公式。

**公式 2-8 | 反函数的微分公式**

$$g'(y)=\frac{1}{f'(x)}$$

1. 反函数：Inverse Function。

PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com

## 小结

■各种微分公式

| | 公式 | 关键 |
|---|---|---|
| 常系数 | $(\alpha f(x))'=\alpha f'(x)$ | 微分之后系数保持不变。 |
| $x^n$ (幂函数) | $(x^n)'=nx^{n-1}$ | 将指数作为系数，其次数减去1。 |
| 和 | $(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)$ | 和的微分就是微分的和。 |
| 积 | $(f(x)g(x))'$ $=f'(x)g(x)+f'(x)g'(x)$ | 逐一微分后，再求和。 |
| 商 | $\left(\frac{g(x)}{f(x)}\right)'=\frac{g'(x)f(x)-g(x)f'(x)}{f(x)^2}$ | 分母取2次方。分子为两函数逐一微分后的差。 |
| 复合函数 | $(g(f(x)))'=g'(f(x))f'(x)$ | 外层函数的微分与内层函数微分的积。 |
| 反函数 | $g'(y)=\frac{1}{f'(x)}$ | 反函数的微分就是其自身微分的倒数。 |

## 第2章 本章习题

**1.** $n$ 为自然数，求函数 $f(x)=\frac{1}{x^n}$ 的导函数 $f'(x)$。

**2.** 求 $f(x)=x^3-12x$ 的极值。

**3.** (1) 求 $f(x)=(1-x)^3$ 的导函数 $f'(x)$。

(2) 求 $g(x)=x^2(1-x)^3$，在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 范围内的最大值。

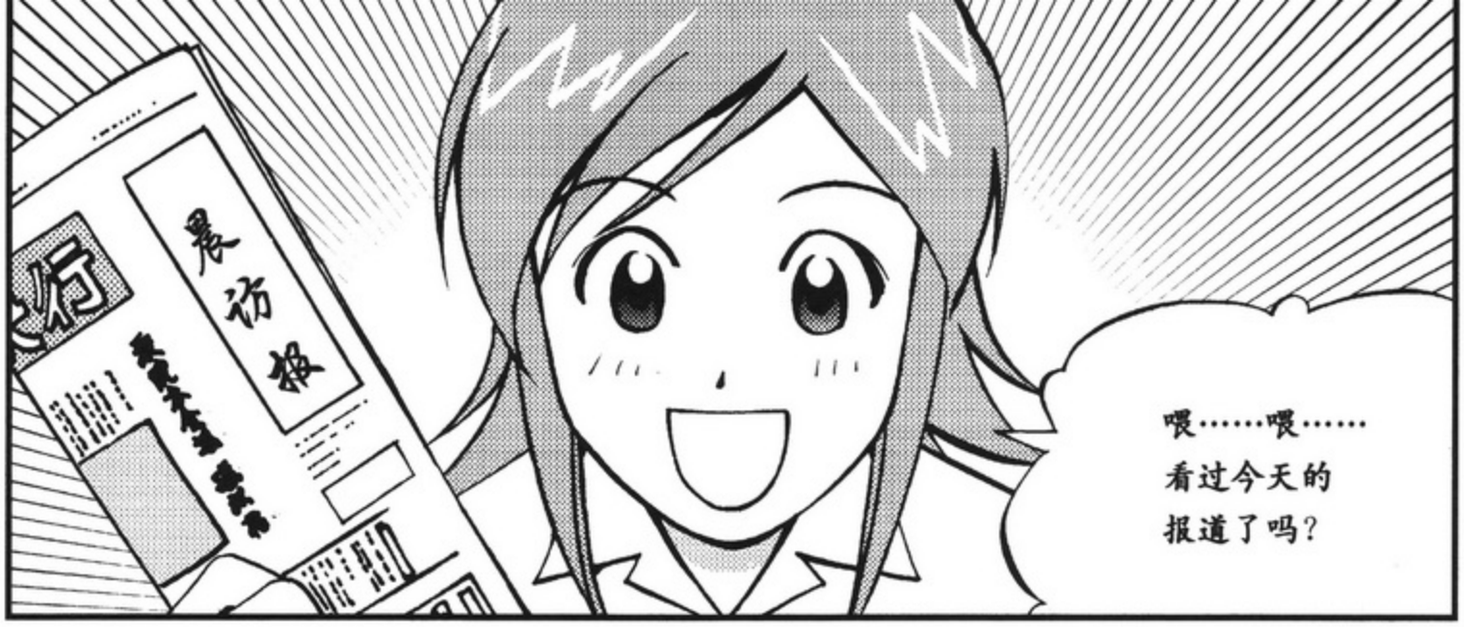

我的博客 http://book-life.blog.163.com

# 第3章

# 积分——平滑变化的量的累加之和



PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com

















我的博客 http://book-life.blog.163.com













PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com





我的博客 http://book-life.blog.163.com







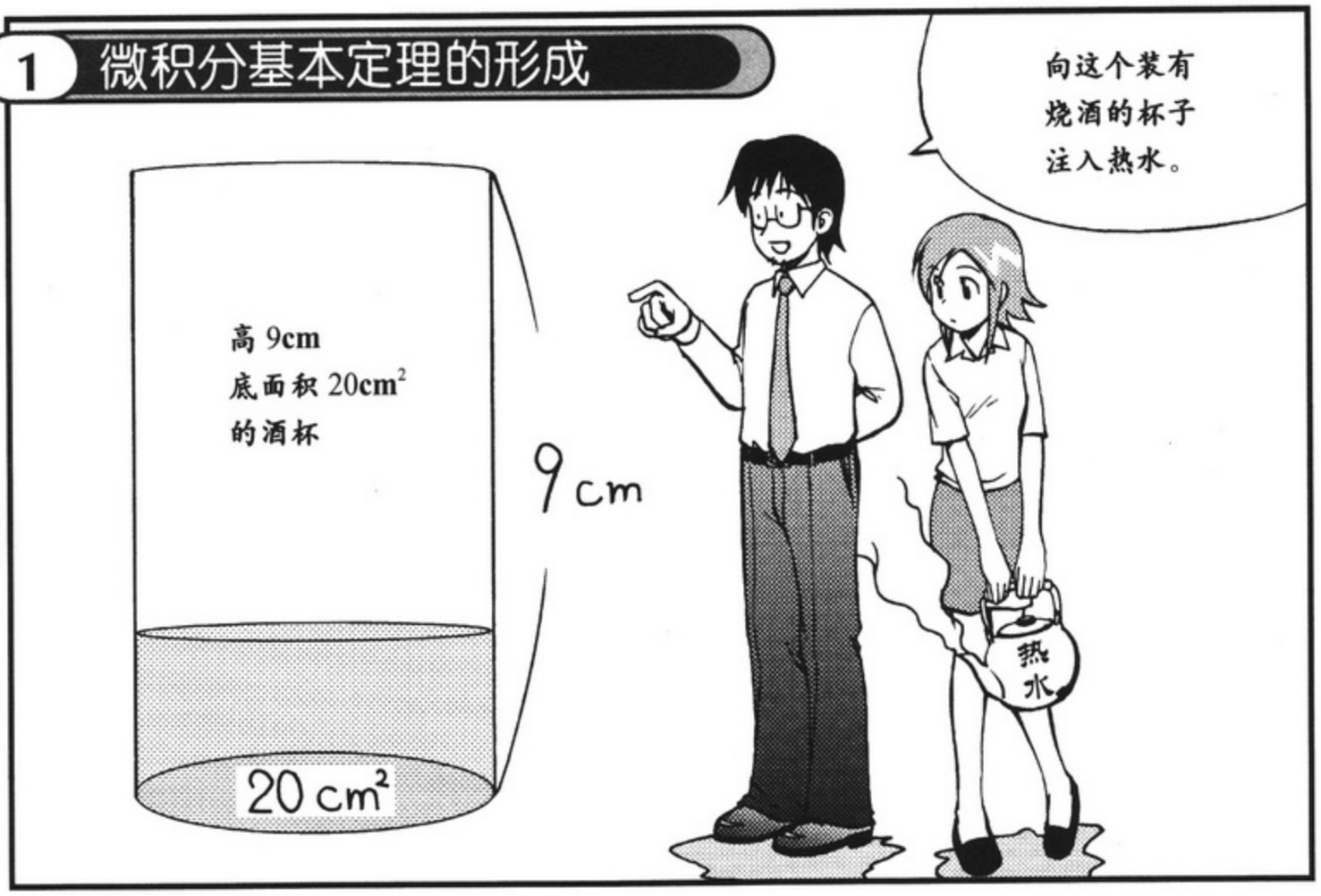






PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com

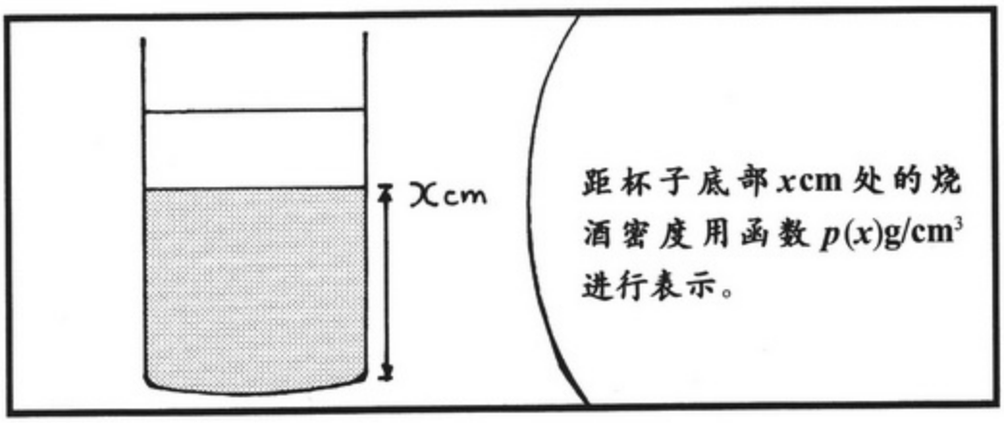
# 1 微积分基本定理的形成





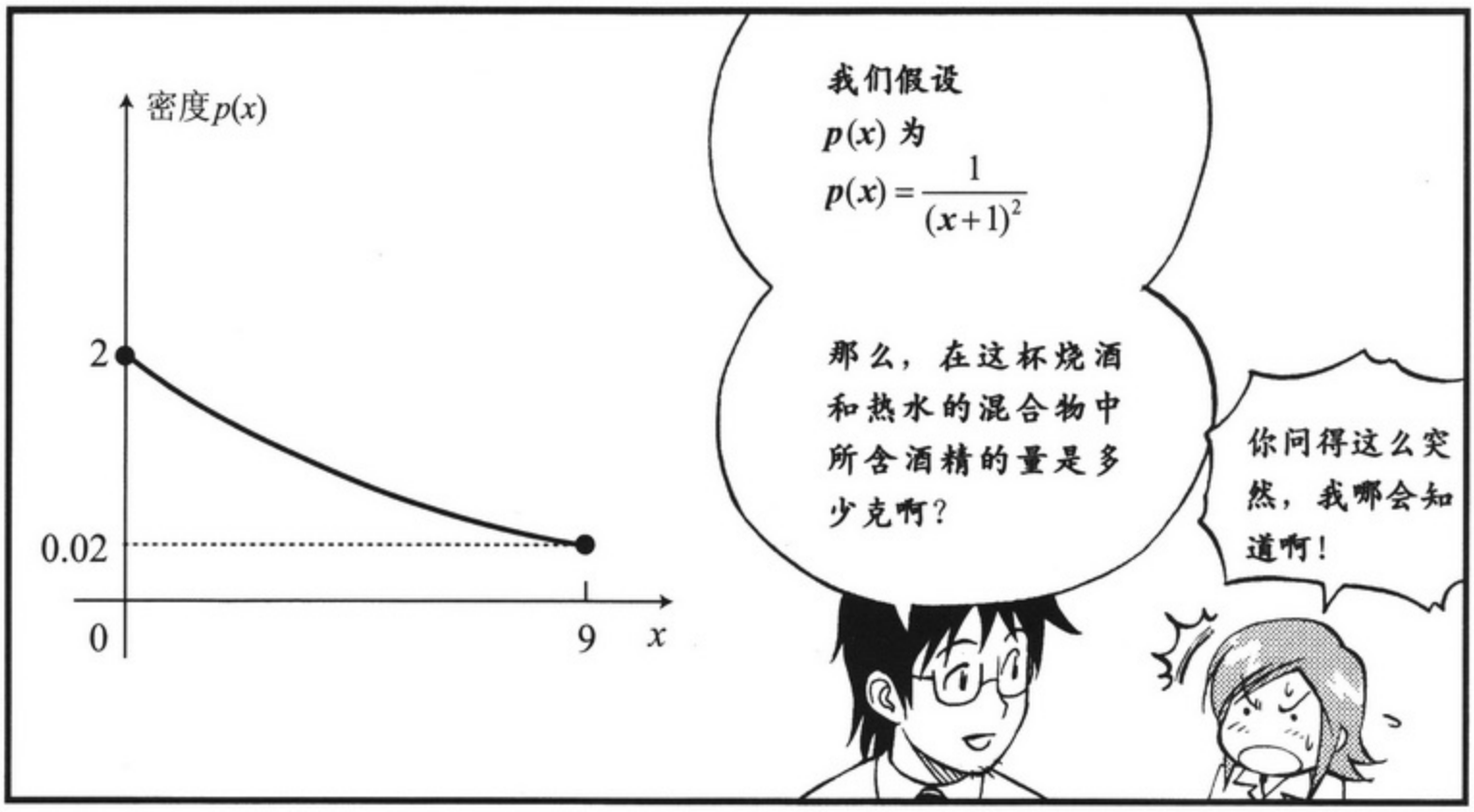


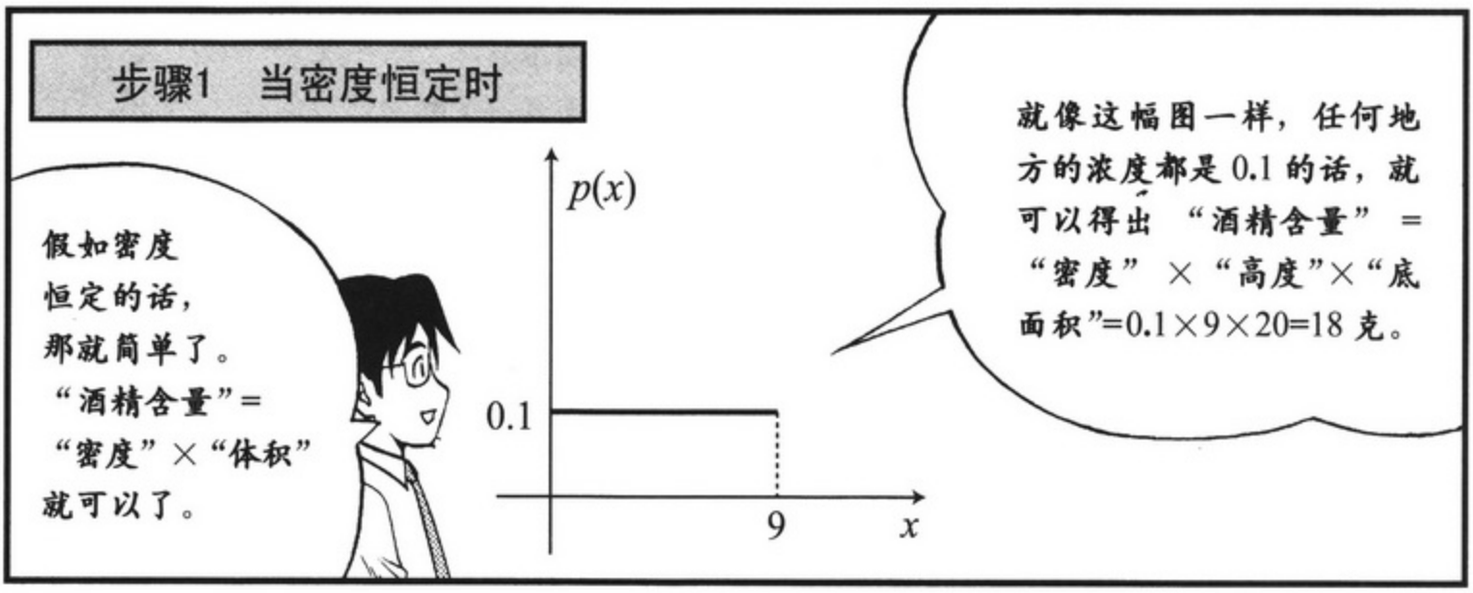


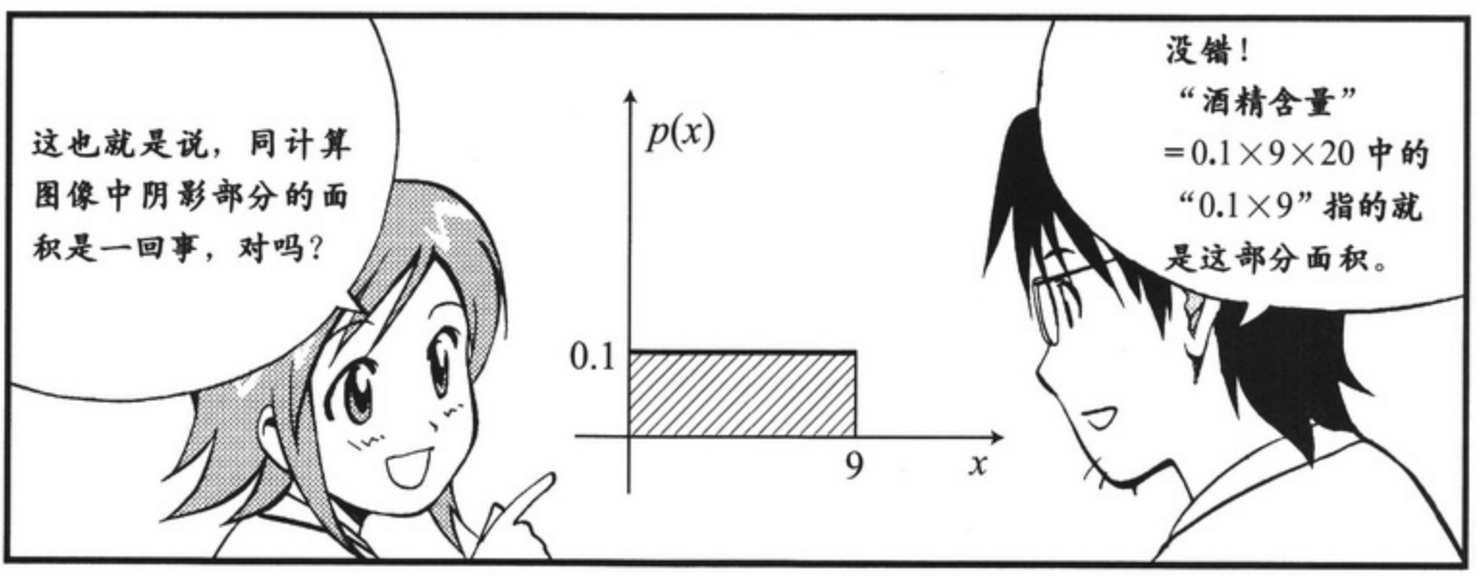





我的博客 http://book-life.blog.163.com



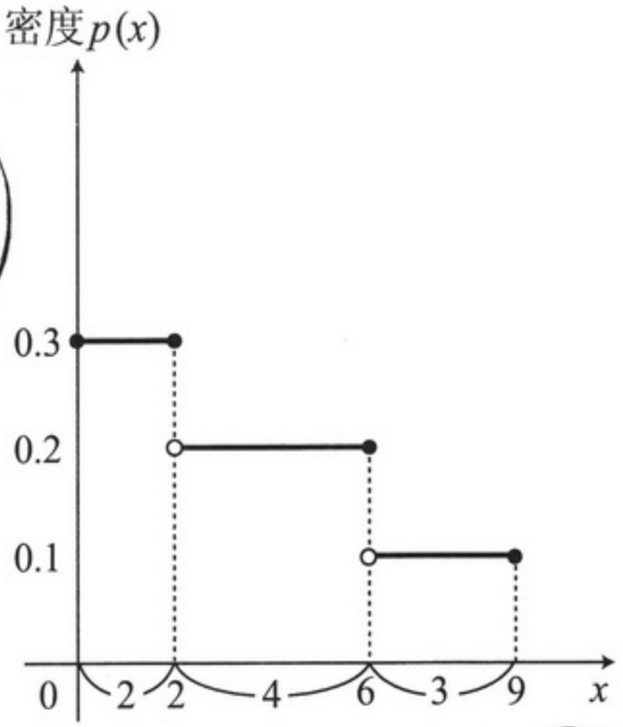




PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com

## 步骤2　当密度呈阶段性变化时

就是说，当密度呈不连续的阶段性变化时，我们也能够进行计算。

比方说，以右边的这幅图为例。




引间小姐，试着算一下吧。

嗯……
将每一阶段划分开来……
底面积为 20cm²……

$$\underset{\left(\begin{array}{l}0\leqslant x\leqslant 2\text{时}\\ \text{这部分的}\\ \text{酒精含量}\end{array}\right)}{0.3\times 2\times 20}+\underset{\left(\begin{array}{l}2<x\leqslant 6\text{时}\\ \text{这部分的}\\ \text{酒精含量}\end{array}\right)}{0.2\times 4\times 20}+\underset{\left(\begin{array}{l}6<x\leqslant 9\text{时}\\ \text{这部分的}\\ \text{酒精含量}\end{array}\right)}{0.1\times 3\times 20}$$

$$=(0.3\times 2+0.2\times 4+0.1\times 3)\times 20=34$$

所以……

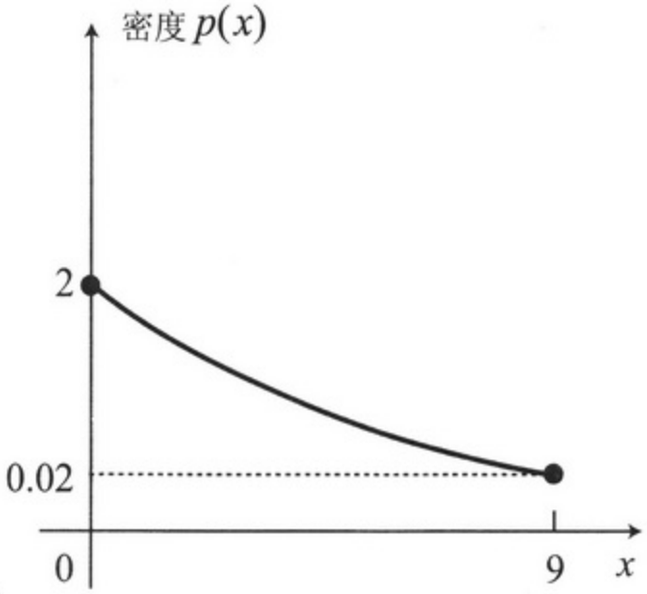

我的博客 http://book-life.blog.163.com

答案是
34克!!

完全正确!

## 步骤3　当密度连续变化时

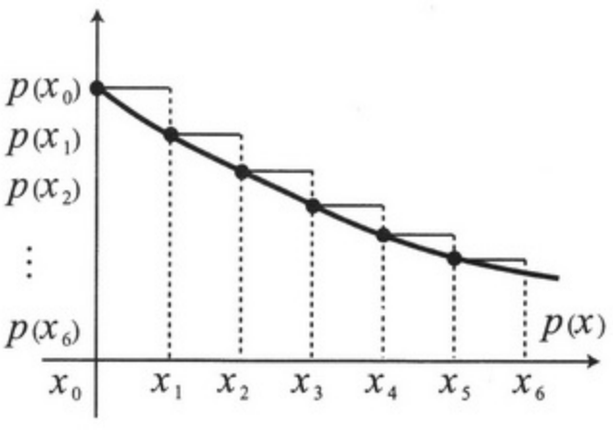
那么，当$p(x)$连续变化时，该怎么做呢？




太麻烦了吧!!

这个一点
也不麻烦!

瞧!




我明白了，首先，将它近似成细分的分段函数，然后像步骤2那样进行计算就可以了!

PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com

是的！
将 $x$ 轴分割为
$x_0, x_1, x_2, \cdots, x_6$。

在 $x_0$ 和 $x_1$ 之间密度恒定，为 $p(x_0)$，

在 $x_1$ 和 $x_2$ 之间密度恒定，为 $p(x_1)$，

在 $x_2$ 和 $x_3$ 之间密度恒定，为 $p(x_2)$。

以此类推，
使用分段函数
对 $p(x)$ 进行近似计算。

只要用这个分段函数计算出酒精含量，就可以得出“真实酒精含量”的一个近似值。

这就是
运算过程啦！

$$p(x_0)\times(x_1-x_0)\times 20$$

$$p(x_1)\times(x_2-x_1)\times 20$$

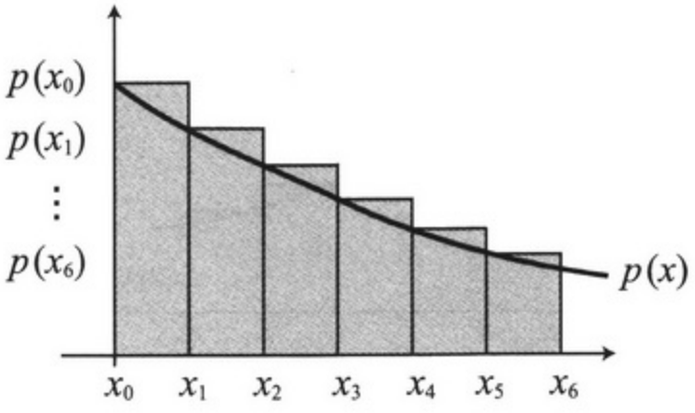
$$p(x_2)\times(x_3-x_2)\times 20$$

$$p(x_3)\times(x_4-x_3)\times 20$$

$$p(x_4)\times(x_5-x_4)\times 20$$

$$+)\quad p(x_5)\times(x_6-x_5)\times 20$$

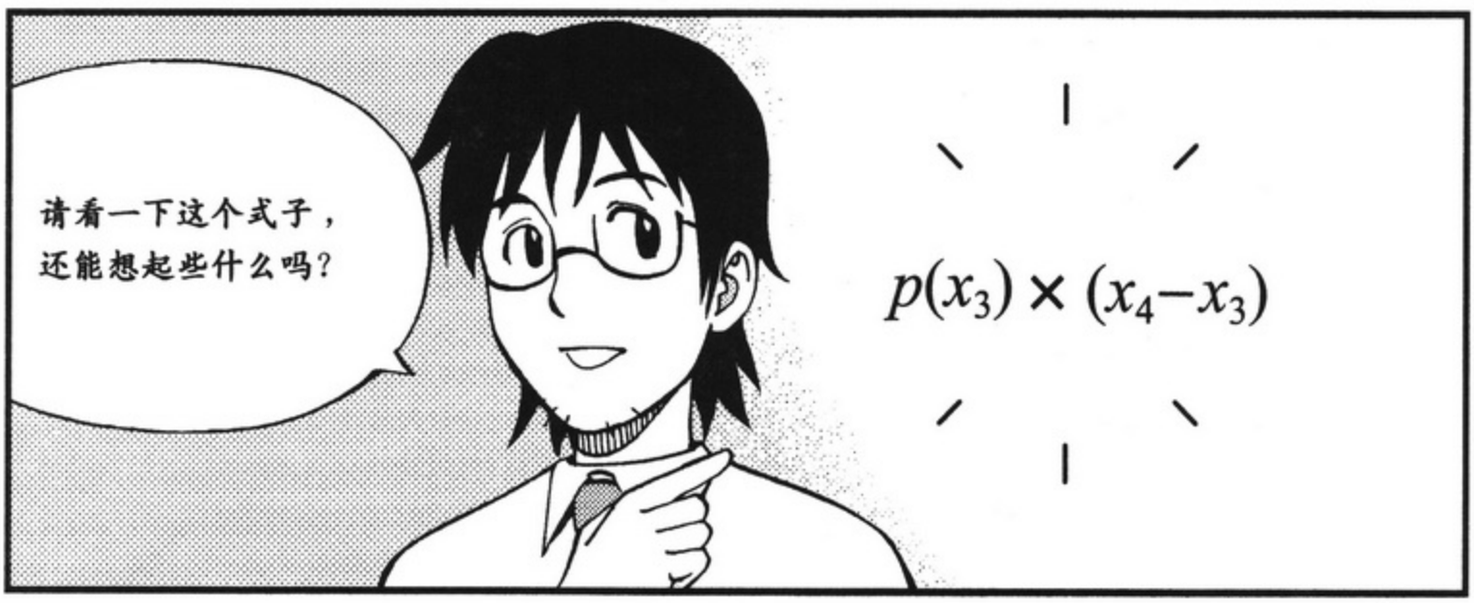
近似的酒精含量




没错！
分段函数图形中阴影部分的面积就是这个式子（不乘以 20）的累加之和。


我的博客 http://book-life.blog.163.com







PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com

## 步骤4　复习近似一次函数

$f(x)$的导函数为$f'(x)$，在$x=a$附近，可以写作

$$f(x) \underset{\text{近似}}{\sim} f'(a)(x-a)+f(a)。$$

将$f(a)$移项，得

$$f(x)-f(a) \underset{\text{近似}}{\sim} f'(a)(x-a) \quad ((f\text{值的差}) \underset{\text{近似}}{\sim} (f\text{的微分})\times(x\text{的差})) \quad \text{——①}$$

只要$x_0$，$x_1$，$x_2$，$x_3$，…，$x_6$之间的间隔足够小，就可以认为$x_1$在$x_0$附近，$x_2$在$x_1$附近，……依此类推。

这里我们研究一下导函数为$p(x)$的函数$q(x)$。(也就是$q'(x)=p(x)$)

将①使用在$q(x)$上$((q\text{值的差}) \underset{\text{近似}}{\sim} (q\text{的微分})\times(x\text{的差}))$，可得

$$q(x_1)-q(x_0) \underset{\text{近似}}{\sim} p(x_0)(x_1-x_0)$$

$$q(x_2)-q(x_1) \underset{\text{近似}}{\sim} p(x_1)(x_2-x_1)$$

$$\vdots$$

我们原本想对右边进行累加，现在这个结果也可以由左边累加后得到了！

整理累加之和的计算式子

$$\begin{aligned}
&q(x_1)-q(x_0) \underset{\text{近似}}{\sim} p(x_0)(x_1-x_0)\\
&q(x_2)-q(x_1) \underset{\text{近似}}{\sim} p(x_1)(x_2-x_1)\\
&q(x_3)-q(x_2) \underset{\text{近似}}{\sim} p(x_2)(x_3-x_2)\\
&q(x_4)-q(x_3) \underset{\text{近似}}{\sim} p(x_3)(x_4-x_3)\\
&q(x_5)-q(x_4) \underset{\text{近似}}{\sim} p(x_4)(x_5-x_4)\\
+)\ &q(x_6)-q(x_5) \underset{\text{近似}}{\sim} p(x_5)(x_6-x_5)\\
\hline
&q(x_6)-q(x_0) \underset{\text{近似}}{\sim} \text{累加之和}
\end{aligned}$$



因为，$x_6=9$，$x_0=0$，所以

近似酒精含量=累加之和×20

$=(q(x_6)-q(x_0))\times 20$

$=(q(9)-q(0))\times 20$


我的博客 http://book-life.blog.163.com

## 步骤5　近似→实际值

现在，
我们得到
如下框图，
整理一下吧！

近似的酒精含量（÷20）

$p(x_0)(x_1-x_0)+p(x_1)(x_2-x_1)+\cdots$

(B)
(近似)

$q(9)-q(0)$
(恒定)

(A)　近似

实际的酒精含量（÷20）



此处，
$x_0$，$x_1$，$x_2$，$x_3$，…
这样的点逐渐增多，
直至无限个。



这时，(A)就不再是“近似”而可以将其看作为是“等号”。

然而，我们一直在近似$q(9)-q(0)$这样的恒定值。

对于无限个$x_i$，求
$p(x_i)(x_{i+1}-x_i)$之和

$q(9)-q(0)$

真实的酒精含量（÷20）



就可以得到
以上关系[1]！

1. 第94页中有更为准确的解法。

PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com

## 步骤6　$p(x)$是$q(x)$的导函数




设$q(x)=-\dfrac{2}{x+1}$，于是

$$q'(x)=\frac{2}{(x+1)^2}=p(x)$$

※ $p(x)$是$q(x)$的导函数
$q(x)$称为$p(x)$的原函数




(酒精含量)$=\{q(9)-q(0)\}\times 20$

$$=\left\{-\frac{2}{9+1}-\left(-\frac{2}{0+1}\right)\right\}\times 20$$

$=36$克








我的博客 http://book-life.blog.163.com

## 2 微积分的基本定理

$$P(x_0)(x_1-x_0)+P(x_1)(x_2-x_1)+\cdots+P(x_5)(x_6-x_5) \quad \text{——②}$$

这个式子……

$$\sum P(x)\Delta x$$

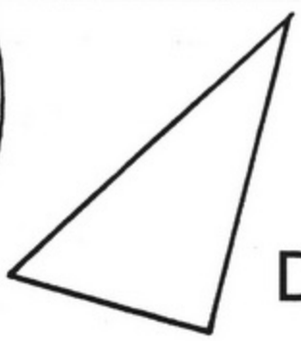
$x=0,x_1\cdots,9$

也可以这样写。

哇——好简洁啊！

但是，那个Δ是什么啊？

Δ(Delta)是希腊字母，我们使用这个符号来表示变化量。




这个$\Delta x$表示的是“到下一个点间的距离”就是$(x_1-x_0)$，$(x_2-x_1)$这样的式子。

那$\sum$呢？

PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com

















我的博客 http://book-life.blog.163.com

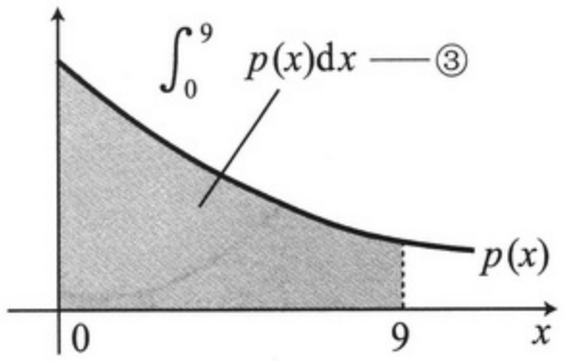
$$\sum p(x)\Delta x \rightarrow \int_0^9 p(x)\Delta x \rightarrow \int_0^9 p(x)\mathrm{d}x$$

把∑拉长变成∫。

哎哟

把Δ改换成d。

哦！




这个③式就表示无限细分之后的累加之和，其所表示的含义是左图中曲线和$x$轴之间所夹的面积。

我们将其称为定积分※。

只要知道$p(x)$是$q(x)$的导函数，

就能够按照

$$\int_a^b p(x)\mathrm{d}x = q(b) - q(a) \quad -④$$

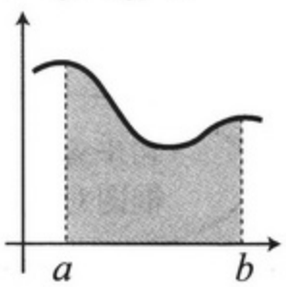
进行计算，这不就很简单了吗？

定积分真是太伟大了!!

……

没听懂

## 小结




$$p(x) = \int_a^b p(x)\mathrm{d}x \underset{\text{近似}}{\sim} \sum_{x=x_0,x_1,\cdots,x_6} p(x)\Delta x$$

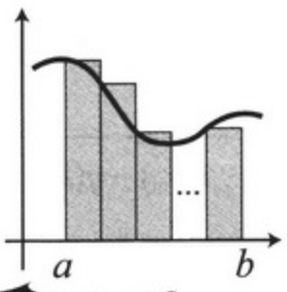
⇓

只要能找出满足$q'(x) = p(x)$的$q(x)$

⇓

$$= q(b) - q(a)$$

⇒




这就是“微积分的基本定理”啦！

※ 定积分：Numerical Integration。

PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com

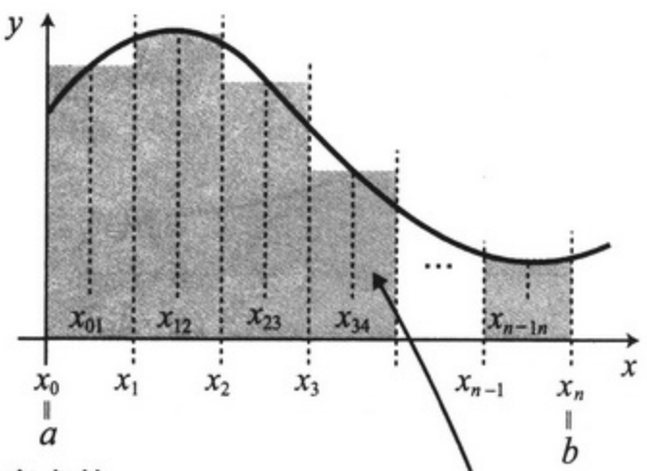
● **步骤5(第89页)详解**

在之前的说明过程中，我们以 $q(x_1)-q(x_0)\underset{近似}{\sim}p(x_0)(x_1-x_0)$，这样一个“刚好合适”的式子，即一个“大概推测出的近似的式子”为基础进行了讲解。为了那些按部就班、无法确信这一式子的人，这里我们再严格地推导一下。只要我们使用“平均值定理”，就算不 使用“ $\underset{近似}{\sim}$ ”这个怪异的符号，也能得到同样的结果。



先找出满足 $q'(x)=p(x)$ 的 $q(x)$，存在点

$$\begin{matrix} x_0, & x_1, & x_2, & x_3, & \cdots, & x_n。\\ \| & & & & & \| \\ a & & & & & b \end{matrix}$$




在 $x_0$ 和 $x_1$ 之间，找出点 $x_{01}$，使其满足

$$q(x_1)-q(x_0)=q'(x_{01})(x_1-x_0)。$$

由“平均值定理”可知，这样的点是一定存在的。

同理，在 $x_1$ 和 $x_2$ 之间，找出点 $x_{12}$，

$$q(x_2)-q(x_1)=q'(x_{12})(x_2-x_1)$$

这些阶段的面积

依此类推

$$\begin{array}{lcll} q(x_1)-q(x_0) & = & q'(x_{01})(x_1-x_0) & = & p(x_{01})(x_1-x_0) \\ q(x_2)-q(x_1) & = & q'(x_{12})(x_2-x_1) & = & p(x_{12})(x_2-x_1) \\ q(x_3)-q(x_2) & = & q'(x_{23})(x_3-x_2) & = & p(x_{23})(x_3-x_2) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ q(x_n)-q(x_{n-1}) & = & q'(x_{n-1n})(x_n-x_{n-1}) & = & p(x_{n-1n})(x_n-x_{n-1}) \end{array}$$

累加求和

$+)$

$q(x_n)-q(x_0)$ ← 恒等于 → 近似面积

$\|$

$q(b)-q(a)$

和步骤5中的框图对照一下。

进行无限细分

$q(b)-q(a)$ ← 等于 → 真实面积




我的博客 http://book-life.blog.163.com

# 3 积分公式

**公式 3-1 | 积分公式**

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_b^c f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x \qquad \text{——(1)}$$

(对于同一函数的定积分来说，积分区间可以进行接续。)

$$\int_a^b \{f(x)+g(x)\}\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \qquad \text{——(2)}$$

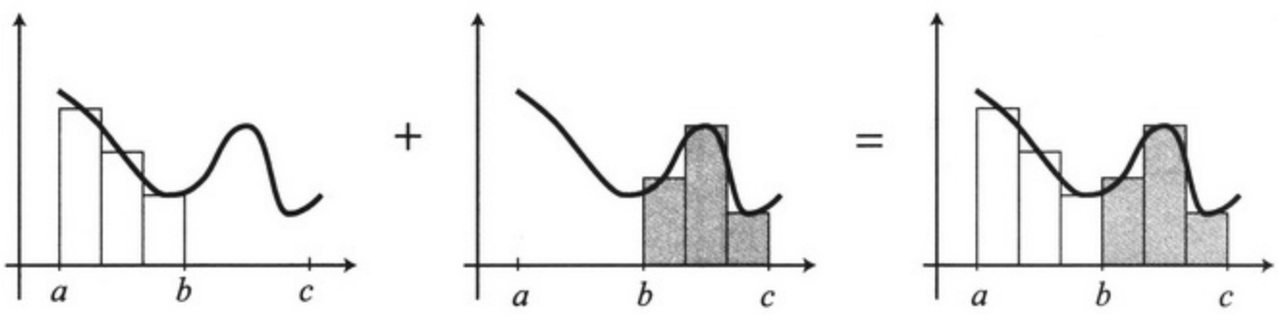
(和的定积分，可以分开写成定积分的和。)

$$\int_a^b \alpha f(x)\mathrm{d}x=\alpha\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \qquad \text{——(3)}$$

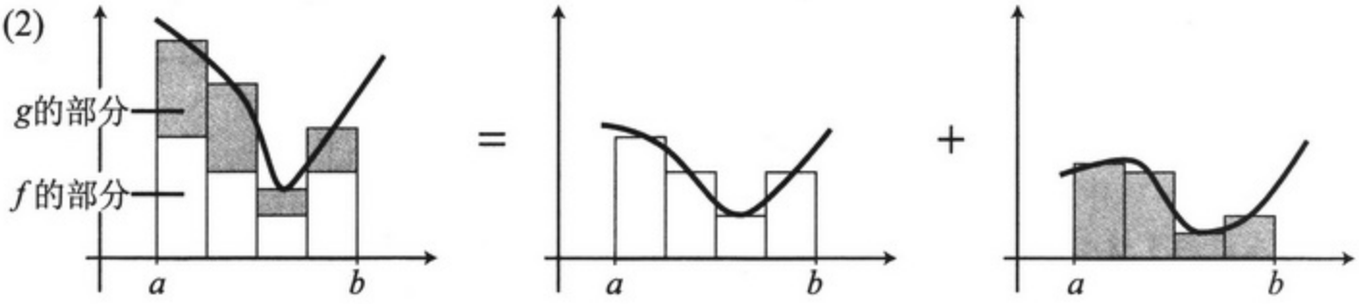
(常数倍函数的定积分，等于定积分之后再乘以常数倍。)

(1)~(3)所画的是近似分段函数的图形，看了自然就会明白。

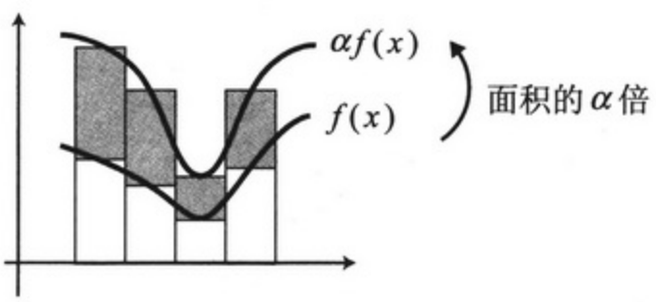
(1)




(2)




(3)







PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com





我的博客 http://book-life.blog.163.com





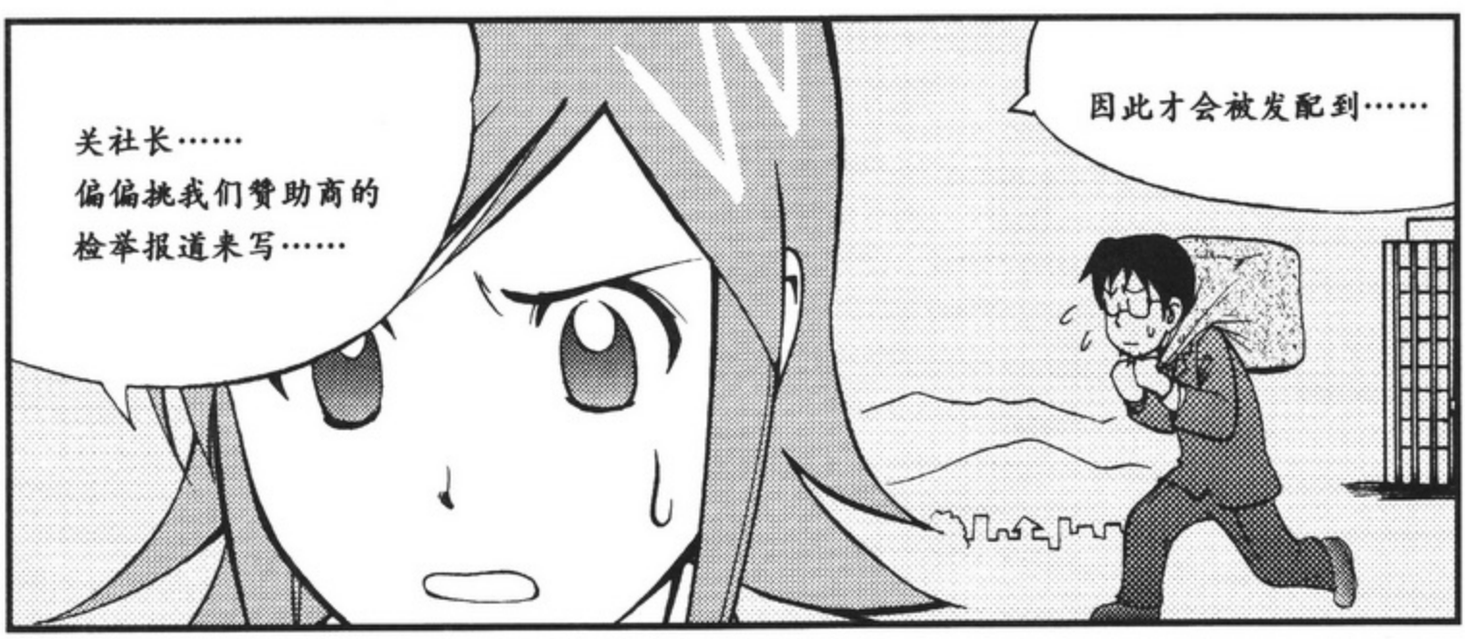


PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com











我的博客 http://book-life.blog.163.com
















PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com








我的博客 http://book-life.blog.163.com

## 4 基本定理的应用举例

……
是需求曲线
和供给曲线……

在经济学中，
需求曲线和
供给曲线……

这两条曲线的交点
决定了交易的价格
和数量。

这是常识啊！

这并不只是意味着
那一点仅仅决定了
交易活动。

实际上，按照这一点
进行交易，还可以使
社会达到最优化

哇——
真厉害啊！

微积报社

嗯。使用微积分的基
本定理，就能简单地
理解这一点了。

PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com

## 供给曲线

首先，考虑一下，在完全竞争市场中企业的最大利润。



设生产$x$件商品的费用为$C(x)$，则利润为$\Pi(x)$：

$\Pi(x)$　$p$　$x$　$C(x)$

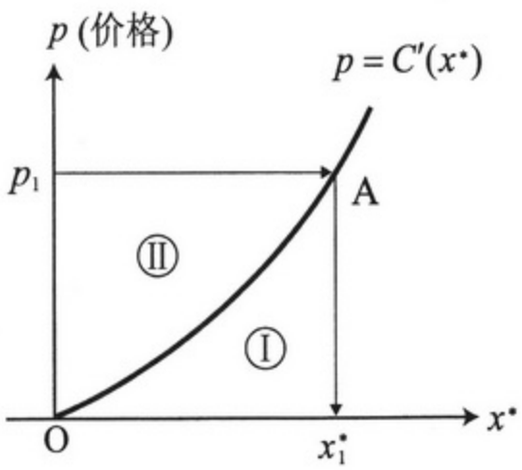
(利润) = (价格) × (生产量) − (费用) = $px - C(x)$

在此，设利润$\Pi(x)$达到最大时的$x$为$x^*$，

于是有，$\Pi(x)$在$x^*$处的微分为$\Pi'(x^*)=0$，

所以，$\Pi'(x^*) = p - C'(x^*) = 0$。

我们将这个$p=C'(x^*)$称为供给曲线。




当价格为$p_1$时，则可以根据$p_1 \to A \to x_1^*$，由此决定企业的最佳生产量。




我的博客 http://book-life.blog.163.com

此时，长方形 $Op_1Ax_1^*$ 的面积就相当于(价格)×(生产量)。

Ⅰ 的面积，可以通过积分得出。

$$\int_0^{x_1^*} C'(x^*)\,dx^* = C(x_1^*) - C(0) = C(x_1^*) = (\text{费用})$$

此处使用了基本定理　简单起见，令 $C(0)=0$

因此可知，利润 $\Pi(x_1^*)$ 就是Ⅱ的面积((长方形的面积)−(Ⅰ 的面积))。

---

## 需求曲线

接下来，再考虑一下，消费者所获得的最大利益。

当消费者消费 $x$ 件商品时，设其所获得的实际价值为 $u(x)$，则消费者的利益 $R(x)$ 为

$$R(x) = (\text{消费的价值}) - (\text{所支付的金额}) = u(x) - px$$

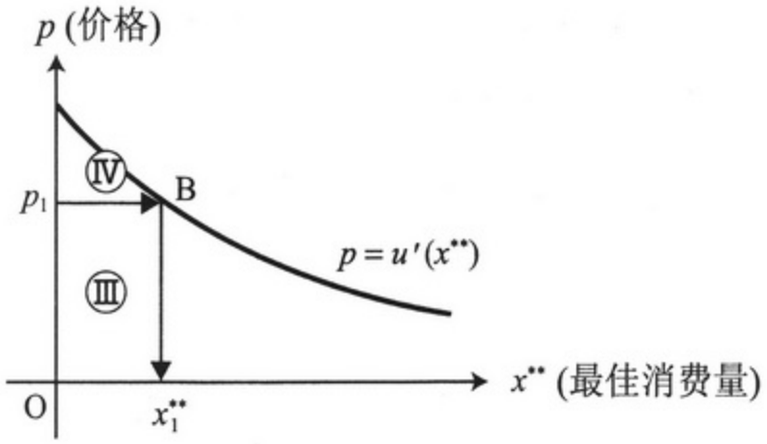
在这个 $R(x)$ 达到最大的时候，这种商品的消费量也就达到了最大值。

此时，消费量为 $x^{**}$，由于 $R(x)$ 在 $x^{**}$ 处的微分值为0，所以

(由于“微分=0”) $R'(x^{**}) = u'(x^{**}) - p = 0$




PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com




然后，再观察一下长方形 $Op_1Bx_1^{**}$ 的面积。

长方形 $Op_1Bx_1^{**}$ 的面积就相当于(价格)×(消费量)。

因此，Ⅲ 的面积 (长方形 $Op_1Bx_1^{**}$)就相当于所支付的金额。

Ⅲ+Ⅳ 的面积，可以通过积分求得。

$$\int_0^{x_1^{**}} u(x^{**})\,dx^{**} = u(x_1^{**}) - u(0) = u(x_1^{**})$$

简单起见，令$u(0)=0$

$$= \text{消费的总价值}$$

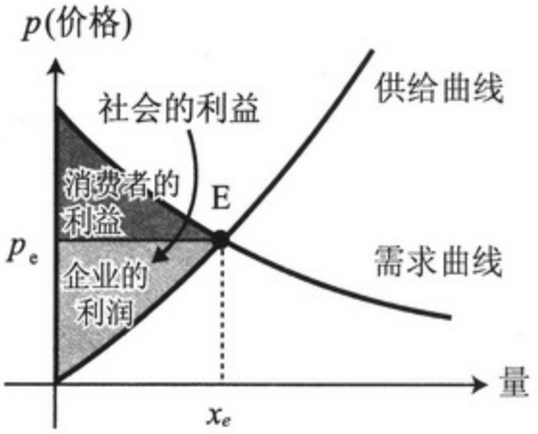
由此可知，Ⅳ 表示消费者的利益。





我的博客 http://book-life.blog.163.com

如右图所示，我们认定
利润+消费者的利益=社会的利益。

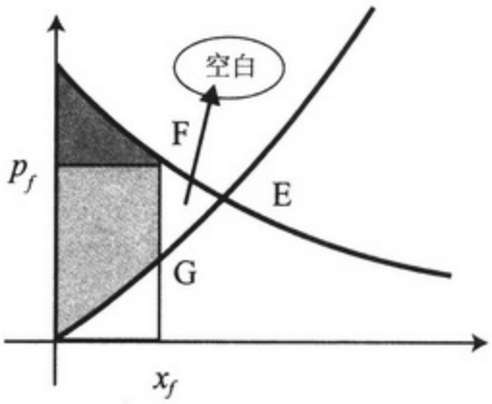





如果不在交点处进行交易，
会发生什么情况呢？

右图就会有空白的地方，
社会的利益变少了。












PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com

大风也不怕/大雨也不怕/微分啦、积分啦/都不怕
头脑清晰/思路流畅/数学式子/玩一样
社会问题，要冷静/切勿乱加/个人感情
打破砂锅问到底/我要解开所有的谜
微积分之歌…⑥　引间栗子

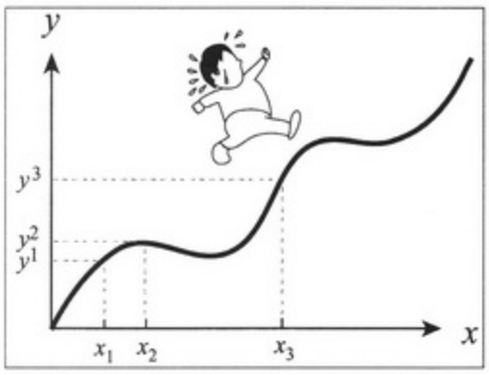
微积分报

（200〇年）
□月□日第006号

微积分报　The Biseki Shinbun
发行人　引间栗子
微积分报编辑部　算田镇大字大森字小森下

# 速度的积分就是距离

速度的积分＝位置的差＝移动的距离。只要理解了这个公式，那些关于变速运动的计算问题，就能够迎刃而解了……真的会是这样吗？下面由本报寄予厚望的新人、引间记者为您揭开真相。




大汗淋漓的增井在 $y$ 轴上进进退退，在 $x_1$，$x_2$，$x_3$，…时刻，分别走到 $y_1$，$y_2$，$y_3$，…处，这一过程可以表示为 $y=F(x)$。

这个问题，可能有的人一听就明白了，而有的人暂时还不能理解。本报曾有一个关于电梯的例子，当时增井记者汗流浃背地为我们进行说明。读者朋友可能会回想起距离的微分就是速度，以及增井挥汗如雨的身影。这个爱出汗的增井偶尔还是能派上用场的。

那么，在 $y$ 轴上移动的大汗淋漓的增井，$x$ 秒后的位置可以用右图中的式 1 进行表示。

这个式 1 的导函数就是 $x$ 秒后的“瞬时速度”。速度在英语中写作 Velocity，为了便于理解我们用 $v$ 将 $F'(x)$ 记作 $v(x)$，于是就可以得到如式 2 所示的微积分的基本定理。

式1　$y=F(x)$

式2　$\int_a^b v(x)\,\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$

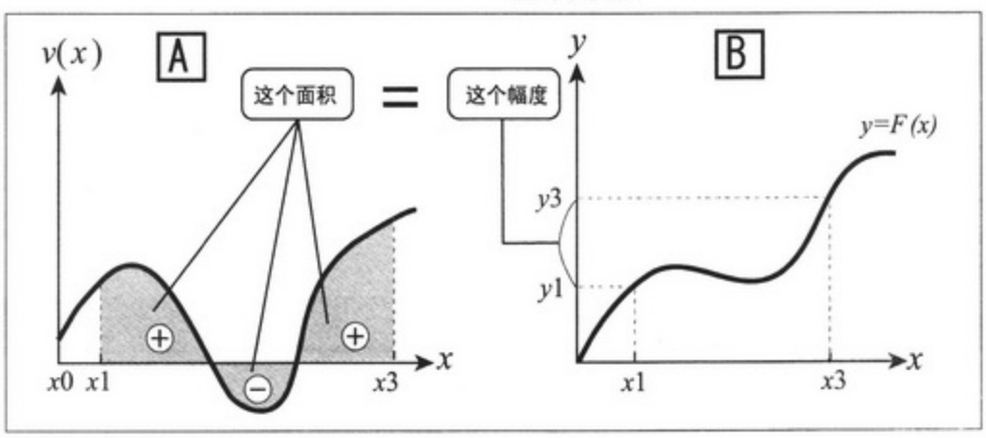



图 1

## 速度的积分=位置的差

真相很快就要水落石出了。如果要将式 2 中的 $v(x)$ 用图像表示出来，就会得到图 1 中的 A 。图 1 中的阴影部分就是速度的面积。

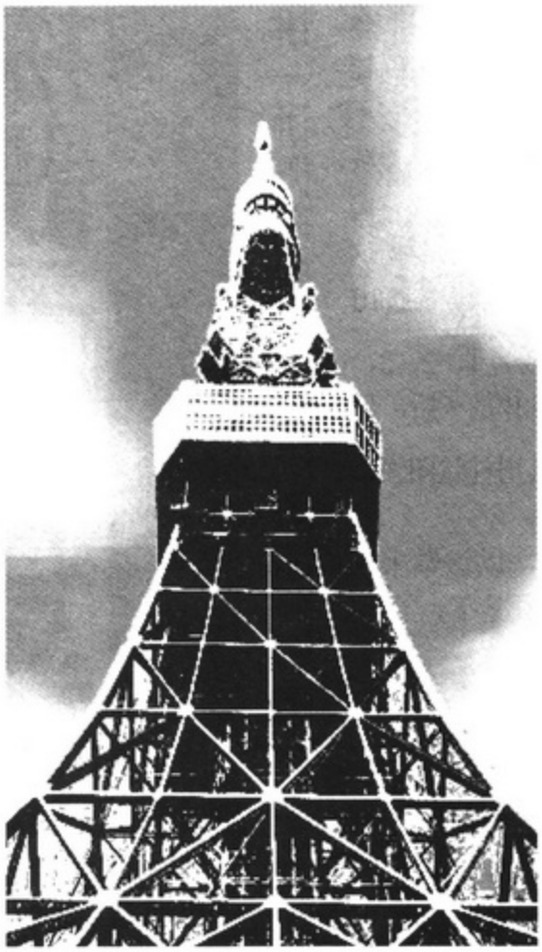
再将式 1 画成图像，就可以得到图 1 中的 B 。在 $y$ 轴上挥汗如雨的增井所移动的距离（即位置的差），综合 A 和 B 一起观察，就会得出真相！

**速度的积分等于位置的差**

理解了这一公式的记者，就能够顺利地解答关于变速运动的计算问题。比方说，公共汽车，嗯，还可以是……



我的博客 http://book-life.blog.163.com



# 从东京塔落下的物体几秒后着地？

当我们再一次凝视理所当然的事情……这是近来对微积分有所领悟的记者的新境界。世间总有一些理所当然的事情。然而，在其背后必定隐藏了某些规律，因此才使它们成为理所当然的事情。例如，手中的物体一但脱离，便会下落。此时，可以将其称为速度是时刻变化的变速运动。那么，它就是一种完全遵循微积分公式的运动。

前面铺陈了这么多，作为学过微积分的人，那些有了些自信的记者心中会涌现出这样一道题。

“从东京塔下落的物体，要经过几秒后到达地面？”

“那就去东京塔扔一个物体试试就行了！”增井二话不说就想去考察一番。走吧，Let's go!

注1　重力加速度9.8m/s²

式1　$$F(T)-F(0)=\int_0^T v(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^T 9.8x\,\mathrm{d}x$$

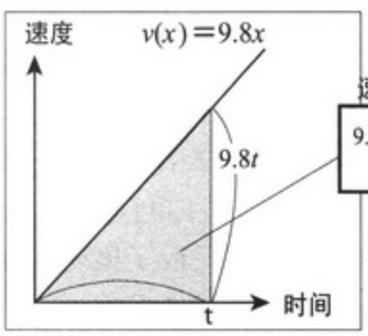



图1

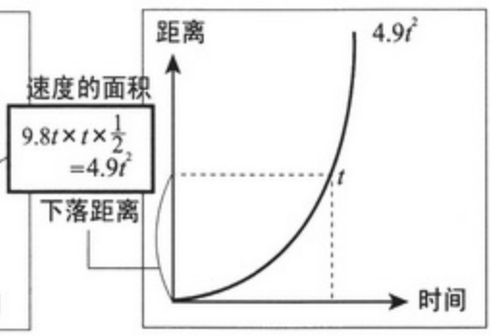



图2

我们都知道，由于重力加速度(注1)的原因，物体在下落的过程中速度会逐渐增加。也就是说，每1秒会增加9.8m。这是由谁规定的呢？谁都不是，是地球的重力使然。那么，在$T$秒间，物体所下降距离就可以通过右侧的式1进行表示。

由于速度的积分等于位置的差也就是移动的距离，参考左侧的图1和图2，便可推导出式2。东京塔的高度为333米，所以式2中$T$秒间所下降的距离就为333米，这样能够计算了。于是，

式2　$$T\text{秒间下落的距离}=4.9T^2-4.9\times 0^2=4.9T^2$$

$$333=4.9T^2 \longrightarrow T=\sqrt{\frac{333}{4.9}}=\text{约}8.2$$

将333除以4.9，之后再取平方根，就是答案了！这样，计算结果约为8.2秒。也就是说物体自东京塔的顶端向底部下落，需要花费约8.2秒才能到达地面(前提条件是忽略空气的阻力)！

## 答案是约8. 2秒。

PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com

# 掷骰子也有学问!!

## 骰子中也有微积分的基本定理

### 讲一讲概率中的密度函数和分布函数

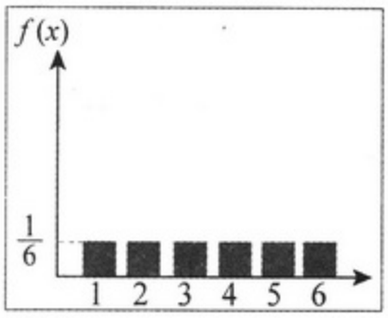



图1　密度函数

式1　$f(x)$ (骰子点数为$x$时的概率)

式2　$f(4)=\frac{1}{6}$ (点数为4的概率)

骰子又叫色子。各位读者，您会想起什么呢？也许会想起儿时玩“双六”时所使用的器具。自古以来，这个六面体便被世人使用，它不仅在游戏中，而且还在占卜、赌博等诸多领域，向我们展示它的“点数”。从数学上来讲，它可以说是世界上最小的随机数发生装置了。要说这骰子，还真是奇妙啊！不仅如此，骰子也能掷出微积分的“点数”。骰子上的点数为1，2，3，4，5，6，这些值会随机出现。掷出骰子后，出现某一特定值的概率是$\frac{1}{6}$。将其用柱状图表示出来。

以横纵来表示所出现的点数，以纵轴来表示出现某个点数的概率。这种情况下，出现任何点数的概率都是相同的，正如图1所示。

将其写成式子后，就会得到式1（$f(x)$=点数为$x$时的概率）。例如，式2所表示的是点数4出现的概率。

请看图2，其所表示的含义就是骰子点数的分布函数。请仔细观察一下。首先，来关注横轴上1的附近。小于1的点数不存在，因此这一部分的概率为0。然后，在正好等于1的时候，概率一跃成为$\frac{1}{6}$，就是说在1以上，2以下的概率为$\frac{1}{6}$。此后，在正好为2的时候，概率再次发生跃变成为$\frac{2}{6}$。这就表示出现2及其以下点数的概率为$\frac{2}{6}$。进一步讲，它同点数小于3的概率是相同的。因此，点数小于3的概率为$\frac{2}{6}$。然而，说起小于3时骰子的点数，也只不过是1和2而已。同理可知，出现6及其以下点数的概率，也就是骰子出现点数的概率是1。骰子是不可能以它的棱角来平稳站立的。

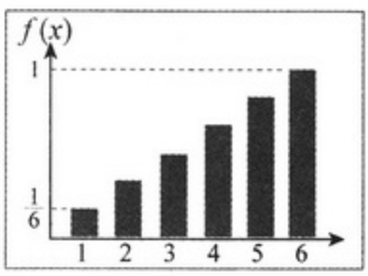



图2　分布函数

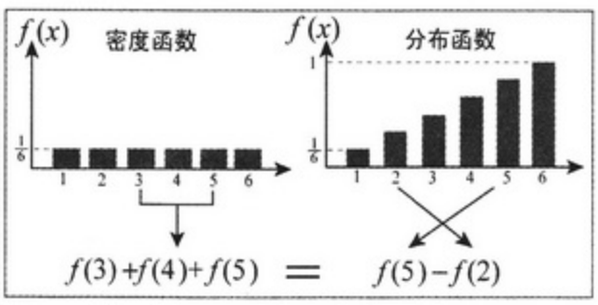



图3　分布函数$F(x)$的微分=密度函数$f(x)$

$f(x)$=密度函数

$F(x)$=分布函数

**满足$a\leqslant x\leqslant b$的数值$x$出现的概率**

**＝**

式3　$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$

（微分后的函数的积分）=（原函数的差）

↓

**微积分的基本定理**

骰子的点数大于2小于等于5的情况，可以使用图1和图2同时进行观察。于是就能够说明图3中的式子。本来骰子不过只有6个点数，但是将它无限细分变得连续以后，就能推导出式3了。这不正和我们所讲的微积分的基本定理道理相同吗！——（微分后的函数的积分）=（原函数的差）。胡乱掷出的骰子，其所出现的点数中竟然隐藏着微积分的规律。真是厉害啊！太喜欢骰子了！


我的博客 http://book-life.blog.163.com
















PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com

## 5 微积分的基本定理的验证

当$F(x)$的导函数为$f(x)$时，即，如果$F'(x)=f(x)$成立，则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b)-F(a) \qquad \text{—— (1)}$$

或者也可以说

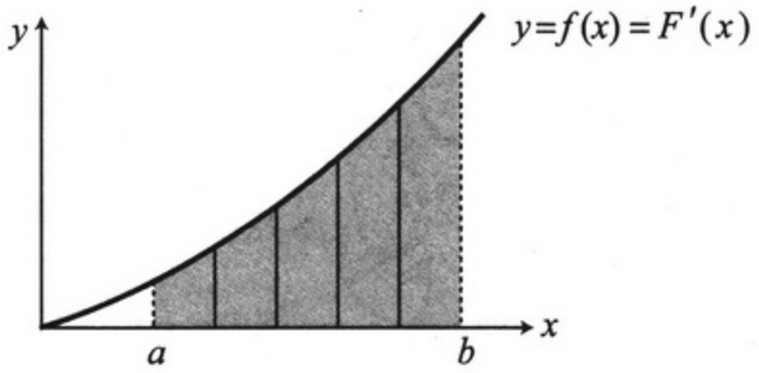
$$\int_a^b F'(x)\,\mathrm{d}x = F(b)-F(a) \qquad \text{—— (2)}$$

这个就意味着式(1)、式(2)可以表示为

$\int_a^b$(微分后的函数)d$x$=(原函数由$b$到$a$之间的差)

用图形表示就是

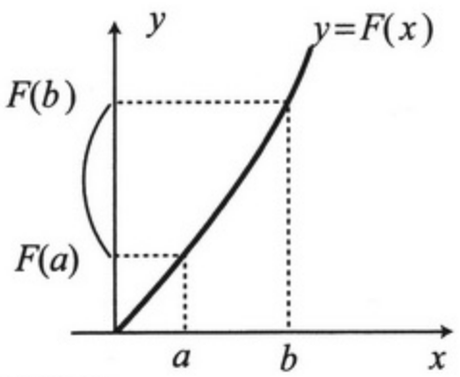
(微分后的函数同$x$轴以及直线$x=a$、$x=b$所围成的(阴影部分)面积)=(原函数由$a$到$b$之间的差)




微积分的基本定理 ↘

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

⇐ 原函数的差





我的博客 http://book-life.blog.163.com

## 换元积分[1]公式

将变量 $x$ 替换为一个关于变量 $y$ 的函数，即 $x=g(y)$时，对于 $f(x)$的定积分 $S=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的值，要如何表示成关于 $y$ 的定积分呢？

首先，对定积分进行分段近似。

$$S\sim \sum_{k=0,1,2,\cdots,n-1} f(x_k)(x_{k+1}-x_k) \quad (x_0=a, x_n=b)$$

然后，再进行 $x=g(y)$的变量代换，于是，有

$$a=g(\alpha), x_1=g(y_1), x_2=g(y_2),\cdots, b=g(\beta),$$

假设 $y_0=\alpha, y_1, y_2, \cdots, y_n=\beta$。

此时，将 $g(y)$近似一次函数，请注意，我们可以得到

$$x_{k+1}-x_k=g(y_{k+1})-g(y_k)\sim g'(y_k)(y_{k+1}-y_k)。$$

将这些代入后，可以得到

$$S\sim \sum_{k=0,1,2,\cdots,n-1} f(x_k)(x_{k+1}-x_k)\sim \sum_{k=0,1,2,\cdots,n-1} f(g(y_k))\,g'(y_k)(y_{k+1}-y_k)$$

最后这个式子，就是对 $\int_\alpha^\beta f(g(y))g'(y)\mathrm{d}y$ 做近似计算的式子。

因此，对其进行理想化的细分后，就可以得到接下来的公式。

1. 换元积分：Integration by Substitution。

PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com

**公式 3-2 | 换元积分公式**

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f(g(y))\,g'(y)\mathrm{d}y$$

(应用举例)　求 $\int_0^1 10(2x+1)^4\,\mathrm{d}x$

令 $y=2x+1$，即做如下变量代换：$x=g(y)=\dfrac{y-1}{2}$

由于 $y=2x+1$，所以 $\mathrm{d}y=2\mathrm{d}x$，最终 $\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\mathrm{d}y$

于是，我们只需考虑对$y$积分求原函数，因为

$0=g(1)$，$1=g(3)$，所以积分区间变成 1~3。

$$\int_0^1 10(2x+1)^4\,\mathrm{d}x=\int_1^3 10y^4\,\frac{1}{2}\mathrm{d}y=\int_1^3 5y^4\mathrm{d}y=3^5-1^5=242$$

**第3章 本章习题**

**1.** 计算以下定积分。

(1) $\int_1^3 3x^2\mathrm{d}x$　　(2) $\int_2^4 \dfrac{x^3+1}{x^2}\,\mathrm{d}x$

(3) $\int_0^6 x+(1+x^2)^7\mathrm{d}x+\int_0^6 x-(1+x^2)^7\mathrm{d}x$

**2.** 计算以下定积分。

(1) 将 $y=f(x)=x^2-3x$ 的图像与 $x$ 轴所围成的面积，用定积分的形式表达出来。

(2) 计算(1)中的面积。


我的博客 http://book-life.blog.163.com

# 第4章

# 复杂的函数

# 可以通过积分解决



PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com

# 1 三角函数是做什么用的



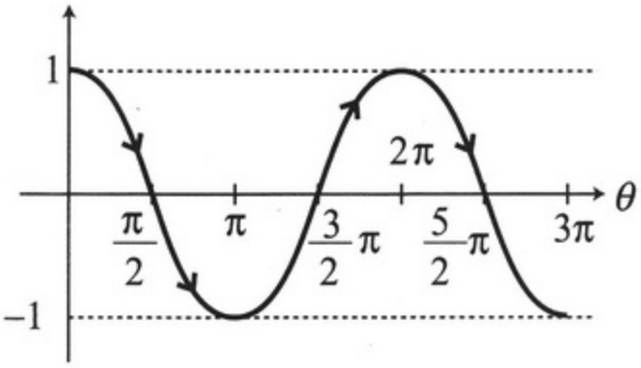


我的博客 http://book-life.blog.163.com




PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com

那你知道这些波能够用函数表示出来吗？比如说“$\cos\theta$”。




唉——
真是三句话不离本行啊！

书籍扫描：铜板+西瓜

引间小姐！

顺便提一下，
将西服的袖子切开
就能得到$\cos\theta$的图形了。



三角函数对于西装裁剪也是很重要的哟！

是啊，是啊！





我的博客 http://book-life.blog.163.com

引间小姐！
快拍那个！
$\cos\theta$！！

啊？

快看那些妇人们。
正好是个不错的机会，
既能进行采访，
又能进一步
学习函数！

搞什么突然
袭击嘛……

“radian”(弧度)
是角度的
一种单位。

rad

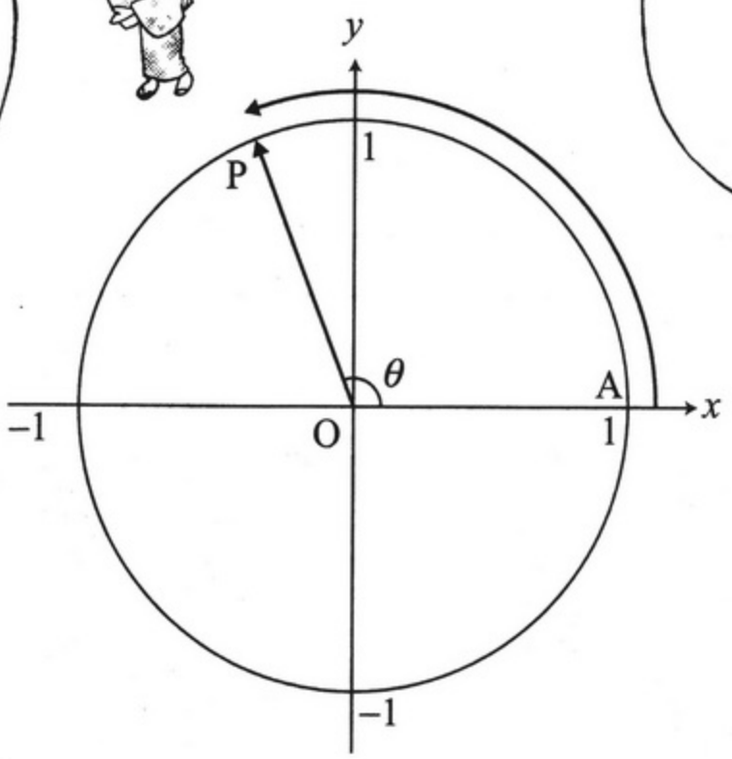
弧度……

不自觉地
就做起
笔记……
我这是……

啊

在以O(0,0)为圆心、1为半径的圆上，一动点P从点A(1,0)出发，沿圆周移动，所经过的圆心角为$\theta$。






所移动的长度
(弧AP的长)
形成的角度，
其单位就是
所说的弧度(rad)。

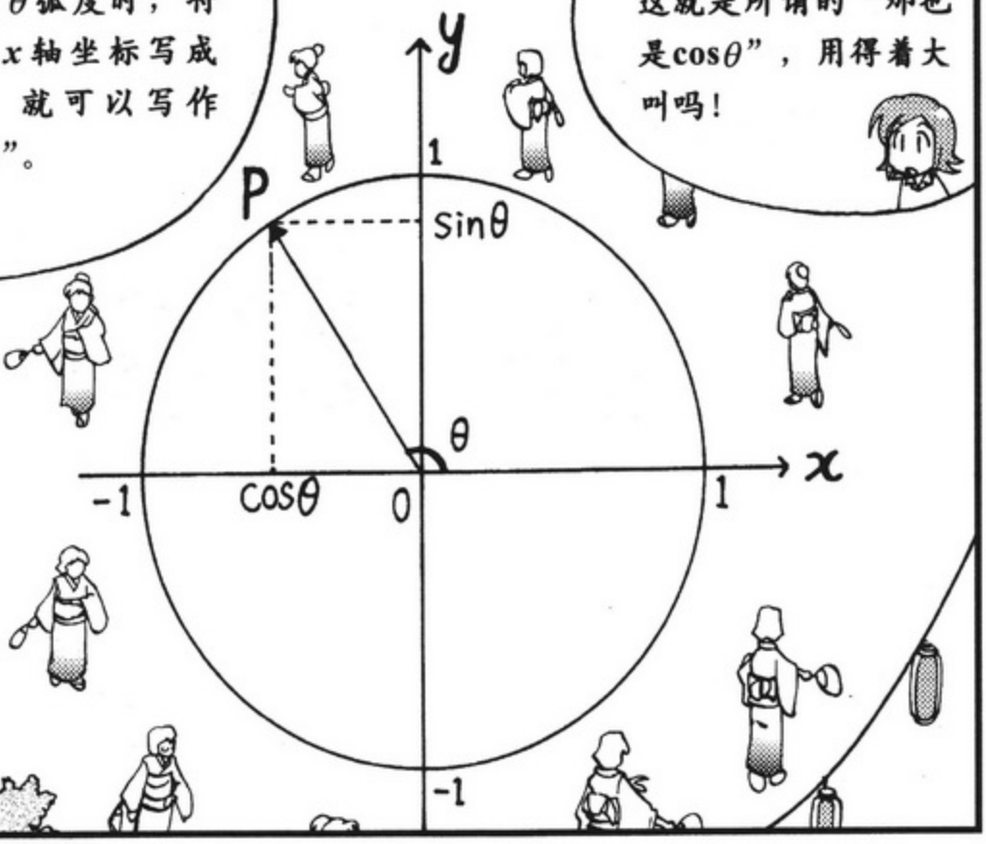
PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com

我们都知道
圆周长 $=2\pi$，
再比如说，
我们会得出
90度$=\frac{\pi}{2}$弧度，
180度＝弧度。

从现在起，
我们全部
使用弧度
作为角度的
单位。

于是，这个跳舞的圈转过了$\theta$弧度时，将P点的$x$轴坐标写成函数，就可以写作“$\cos\theta$”。

啊——
这就是所谓的“那也是$\cos\theta$”，用得着大叫吗！




这个人的
脑袋里
到底……

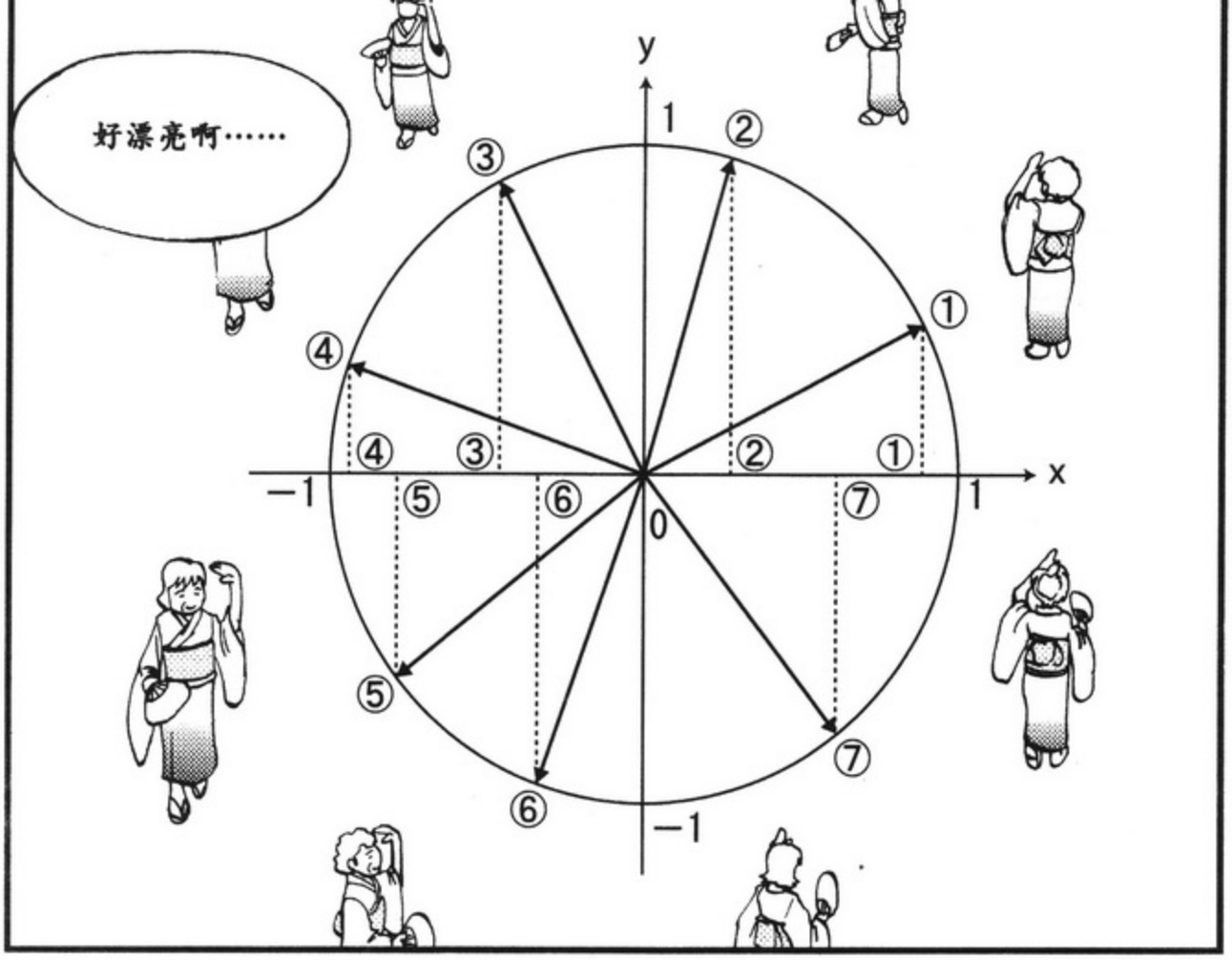
同样，
$y$轴坐标
可以写作
$\sin\theta$。

是啊。

引间小姐！ 快看！！

转

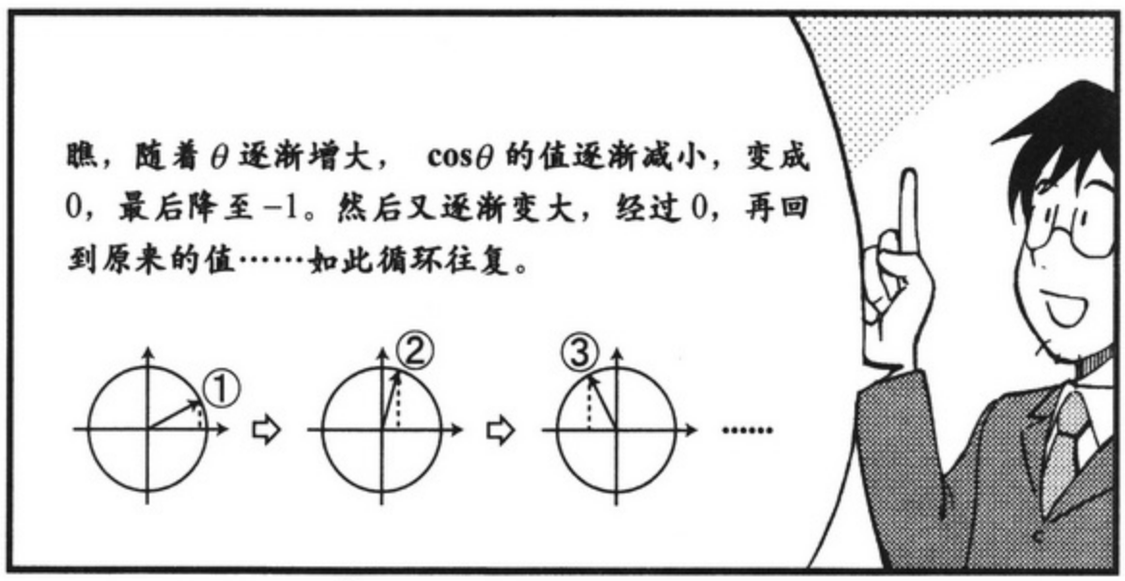
我的博客 http://book-life.blog.163.com









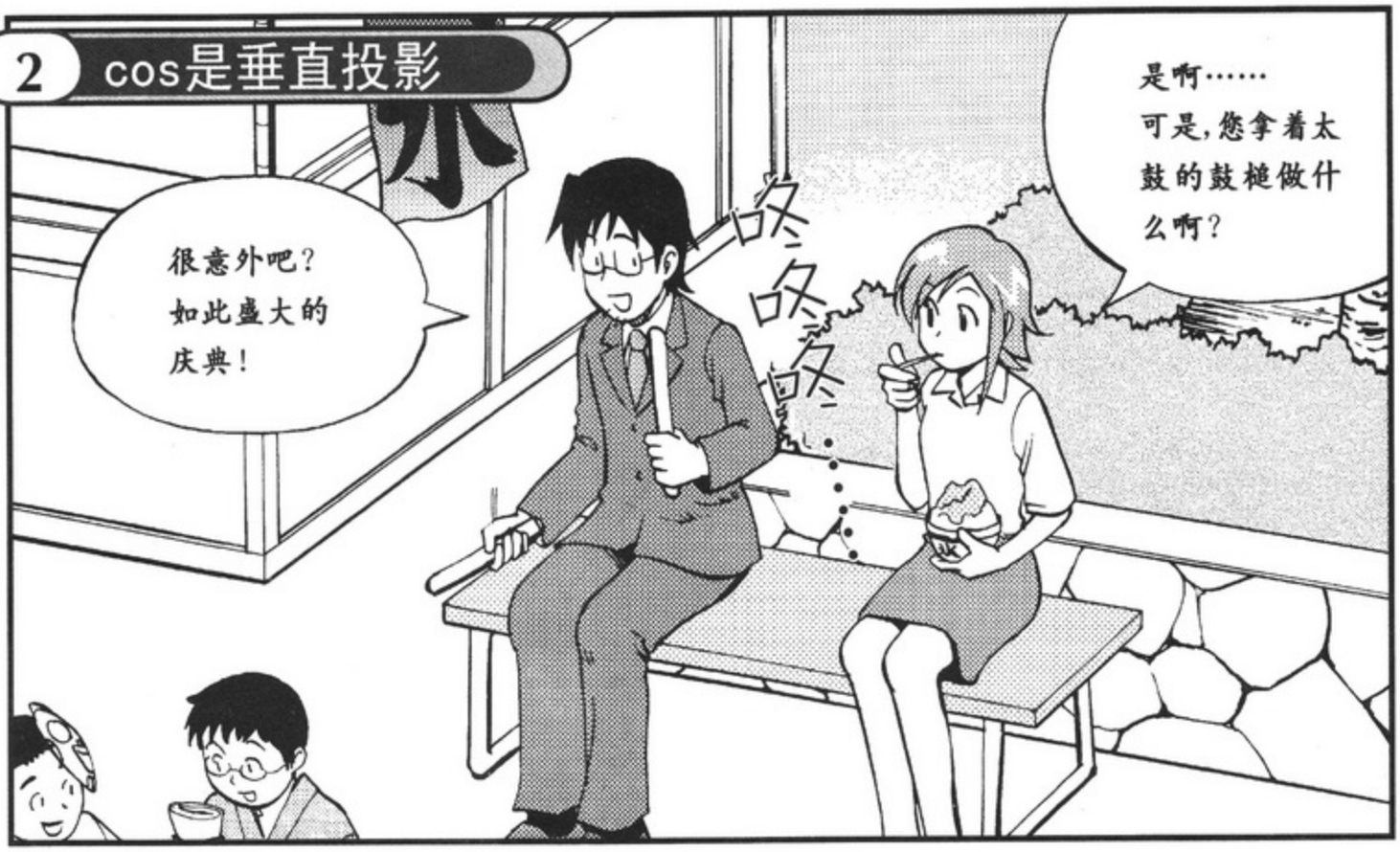







PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com

## 2 cos是垂直投影



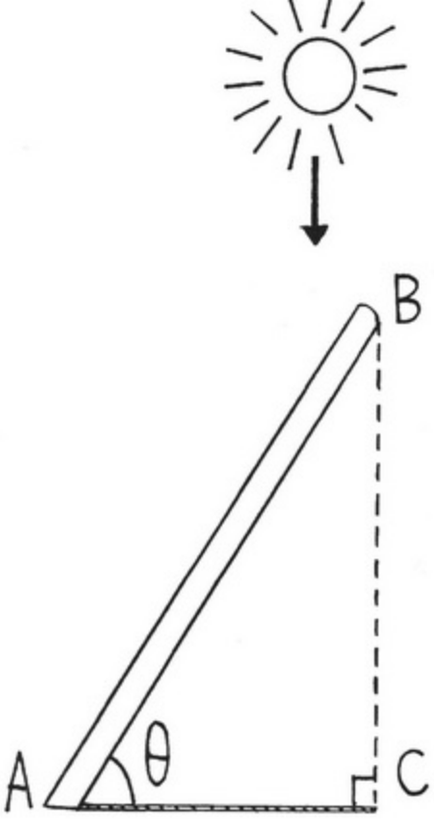








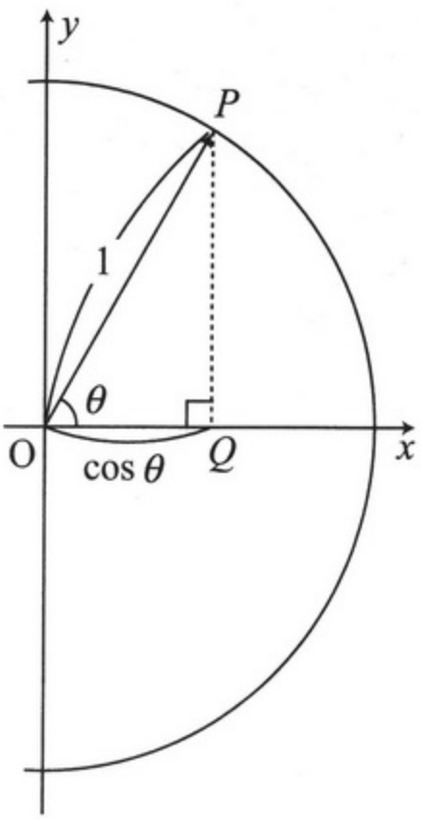
我的博客 http://book-life.blog.163.com





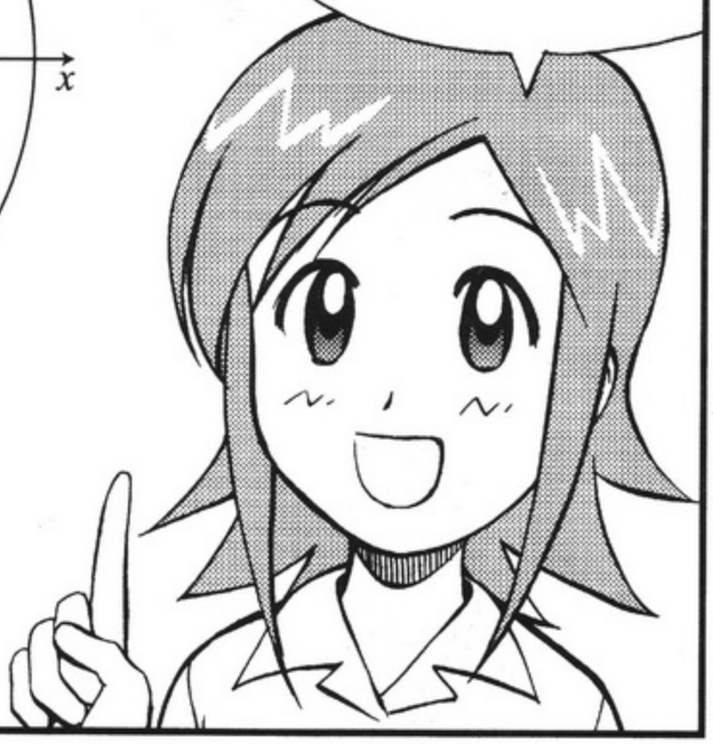

倾斜于地面放置的棒 AB，倾斜角为 $\theta$，太阳从它的正上方垂直照射。

此时的影子（垂直投影）为 AC，于是可得影子 AC 的长度＝棒 AB 的长度 × $\cos\theta$。




因为△OPQ 同上面的△ABC 各个角都相等。

所以，两三角形“相似”AB:AC=1:$\cos\theta$，于是,可得 AC=AB× $\cos\theta$。

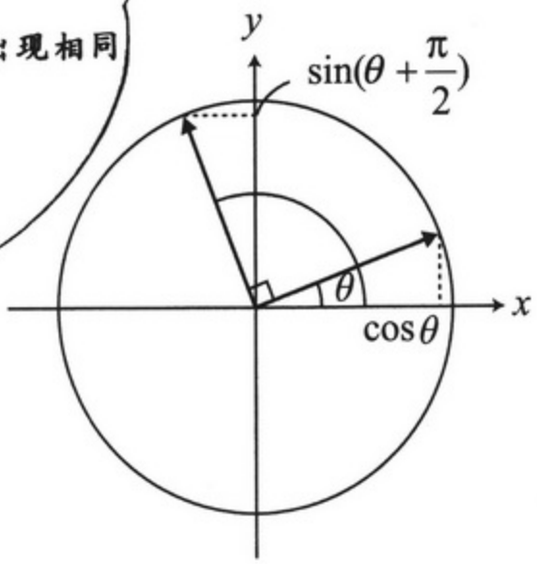


就是说，cos 表示的是向某个方向投影时的缩小率。



PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com

接着刚才的讲，$x$轴旋转90度（$\frac{\pi}{2}$弧度）就是$y$轴，$\sin\theta$是比$\cos\theta$滞后$\frac{\pi}{2}$才出现相同值的函数。




也就是说，

$$\sin(\theta+\frac{\pi}{2})=\cos\theta。$$

$Sin(\theta+\frac{\pi}{2})=\cos\theta$

$\cos(\theta+\frac{\pi}{2})$
$=-\sin\theta$

……？
有什么事吗？

那个……鼓槌
可以还给我了吗？

来吧！
算田夏收节，
现在
正式开始！！


我的博客 http://book-life.blog.163.com

# 3 先来了解三角函数的积分




PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com

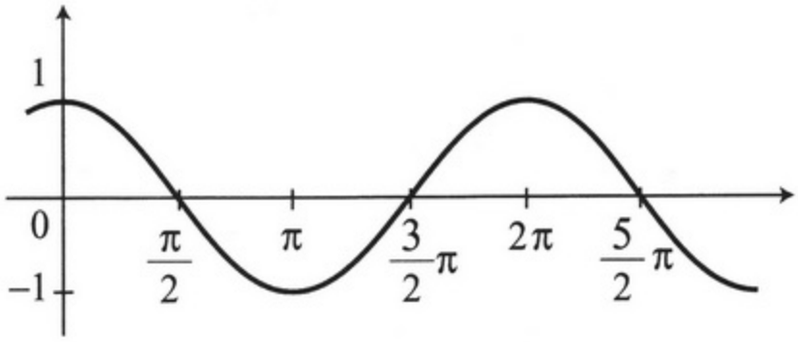
($\cos\theta \times \Delta\theta$的和)

$=\cos\theta_0(\theta_1-\theta_0)+\cos\theta_1(\theta_2-\theta_1)+\cdots$

$+\cos\theta_{n-1}(\theta_n-\theta_{n-1})$

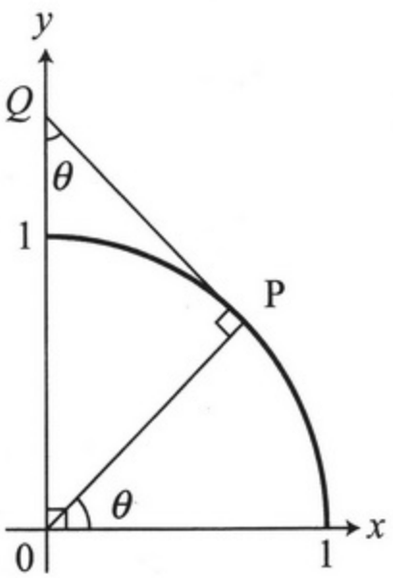
把它变换成什么形式比较好？

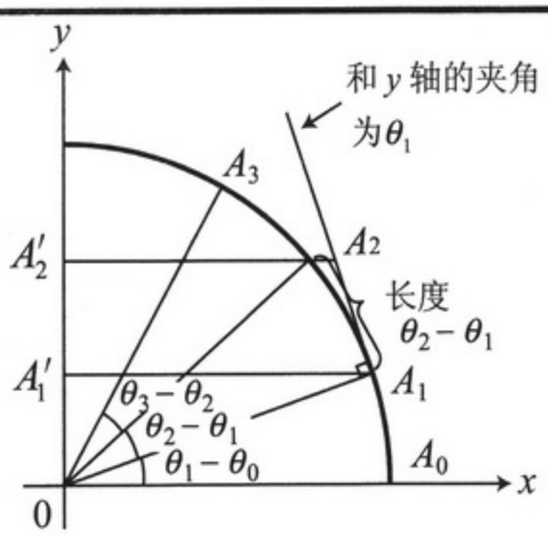
看上去，还真是束手无策啊……




看看这个图，再看看之前的图，有没有注意到一个很巧妙的方法？

以(1，0)为起点，移动$\theta$角到达点P，P点的切线PQ同$y$轴的交角也同样会是$\theta$。




(圆弧$A_1A_2$在$y$轴的投影)$=A_1'A_2'$时

($A_1'A_2'$的长度)$\sim$(弧$A_1A_2$)$\times\cos\theta_1$

近似

$=(\theta_2-\theta_1)\times\cos\theta_1$





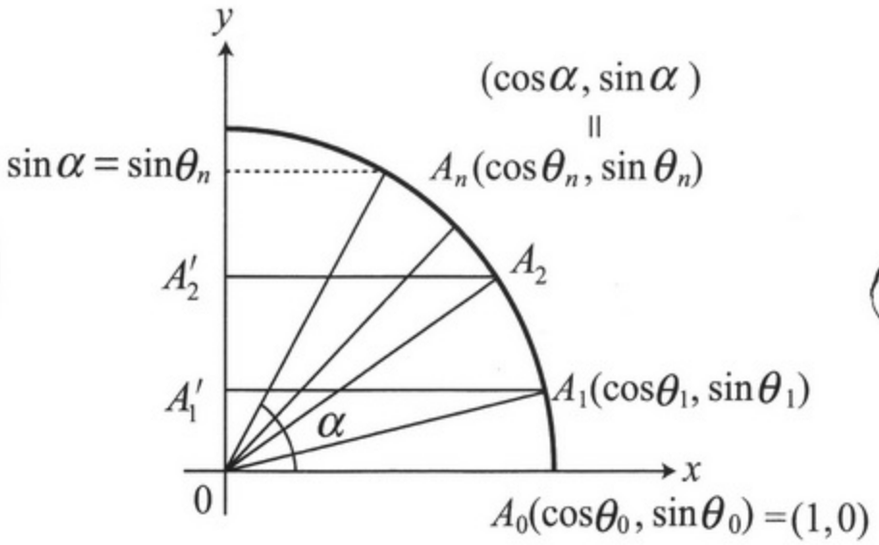







我的博客 http://book-life.blog.163.com

试着用这个做一下从0到$\alpha$的定积分吧。




嗯……

($\theta$ 由 0 移动到$\alpha$ 时， $\cos\theta \times \Delta\theta$的和)

$$=\cos\theta_0(\theta_1-\theta_0)+\cos\theta_1(\theta_2-\theta_1)+\cdots$$
$$+\cos\theta_{n-1}(\theta_n-\theta_{n-1})$$
$$\underset{\text{近似}}{\sim} A_0'A_1'+A_1'A_2'+\cdots+A_{n-1}'A_n'=A_0'A_n'$$
$$=\sin\alpha$$

……
就是这样吧！

没错。
将这个无限细分之后
……

也就是说，对cos的积分就会得到sin。

$\int_0^\alpha \cos\theta d\theta = \sin\alpha - \sin 0$

那么，反过来说，对sin微分就会得到cos？

完全正确！

总结一下公式把它记下吧！

PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com

## 公式 4-1 | 三角函数的微分和积分

$$\int_0^{\alpha} \cos\theta \, d\theta = \sin\alpha - \sin 0 \qquad \text{——①}$$

因以，

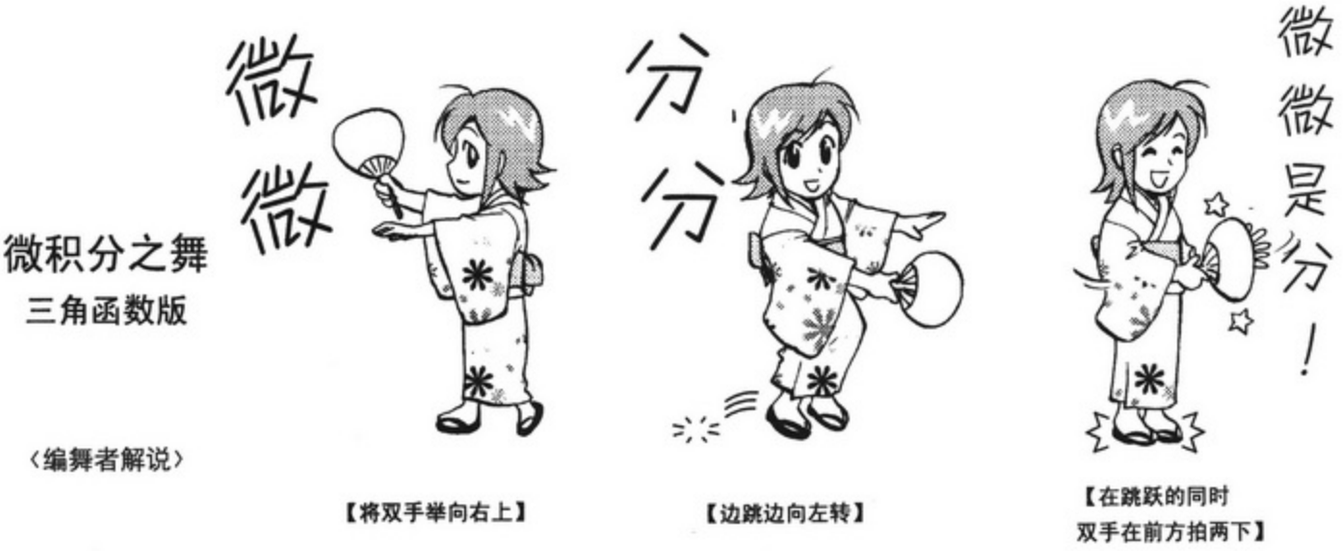
$$(\sin\theta)' = \cos\theta \qquad \text{——②}$$

将②中的$\theta$替换为$\theta + \frac{\pi}{2}$试试看。

$$\left(\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right)' = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$$ 于是，有 $(\cos\theta)' = -\sin\theta$ ——③

进行微分或积分之后，sin 和 cos 之间会相互转换。





我的博客 http://book-life.blog.163.com



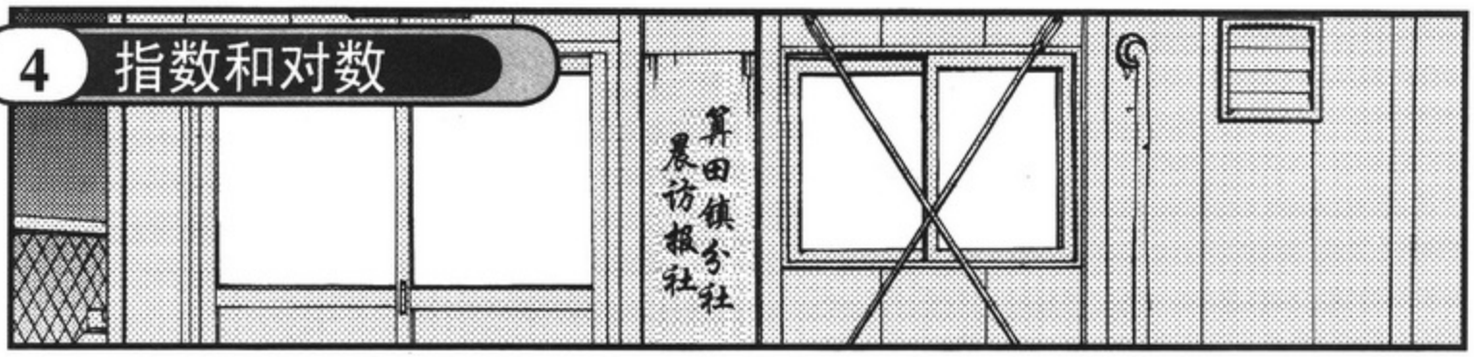

PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com





我的博客 http://book-life.blog.163.com

# 4 指数和对数
















PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com







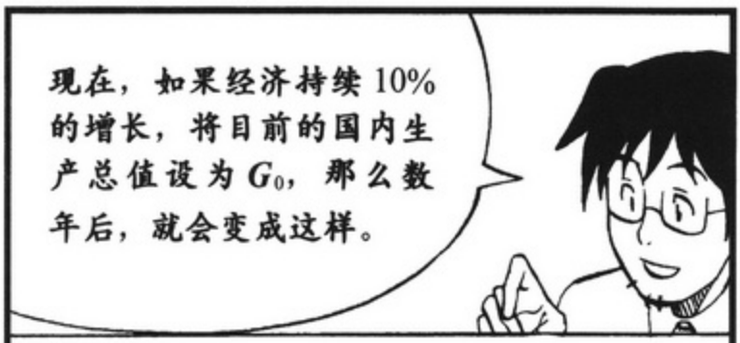






我的博客 http://book-life.blog.163.com




1年后的国内生产总值

$G_1 = G_0 \times 1.1$

2年后的国内生产总值

$G_2 = G_1 \times 1.1 = G_0 \times 1.1^2$

3年后的国内生产总值

$G_3 = G_0 \times 1.1^3$

4年后的国内生产总值

$G_4 = G_0 \times 1.1^4$

5年后的国内生产总值

$G_5 = G_0 \times 1.1^5$










PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com




1. 反函数：Inverse Function。
2. 对数函数：Logartithmic Function。


我的博客 http://book-life.blog.163.com

## 5 指数和对数的定义



虽然指数和对数很方便，不过在我们目前所给出的定义中，$f(x)=2^x$ 中的 $x$ 仅仅为自然数，而 $g(y)=\log_2 y$ 中的 $y$ 也仅限于 2 的指数形式。其余的，像 2 的 $-8$ 次幂、2 的 $\frac{7}{3}$ 次幂、2 的 $\sqrt{2}$ 次幂、$\log_2 5$ 和 $\log_2 \pi$ 等，都不在我们定义的范围之内。

因此，我先来讲一下，通常要怎样对指数和对数进行定义。

咦？为什么要这么做？



还好，你一直都在听。这正好可以用到我们现有的微积分知识。



首先，我们将年“增长率”做一下“瞬时化”处理。



$$\text{年增长率}=\frac{(1\text{年后的值})-(\text{现在的值})}{(\text{现在的值})}=\frac{f(x+1)-f(x)}{f(x)}$$



就从这个式子开始吧！

PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com



那么，将它进一步写作“瞬时增长率”，就会得到这样的式子。

$$\text{瞬时增长率} = \left( \frac{(\text{瞬间之后的值}) - (\text{现在的值})}{(\text{现在的值})} \div (\text{所经过的时间}) \right) \text{ 的理想值}$$

$$= \left( \frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{f(x)} \quad \frac{1}{\varepsilon} \right) \quad (\text{其中, 令} \varepsilon \to 0)$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{f(x)} \frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon} = \frac{1}{f(x)} f'(x)$$



总之，“瞬间增长率”$= \dfrac{f'(x)}{f(x)}$，

如此定义就可以了！

此处，我们设“瞬间增长率”为常函数，即

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = c \quad (c \text{ 为常数})。$$

特别地，令 $c = 1$ 时，求出满足

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 1 \text{ 的函数 } f(x)。$$



要求出这个数，该怎么做呢？

1 首先，将其类推为指数函数试试看。

由于 $f'(x) = f(x)$ —— ☆

所以， $f'(0) = f(0)$ —— ①

在此，如果 $h$ 足够接近 0 的话，回忆一下我们学过的

$f(h) \underset{\text{近似}}{\sim} f'(0)(h-0) + f(0)$。




我的博客 http://book-life.blog.163.com

由①得 $f(h)\sim f(0)h+f(0)$

$$f(h)\sim f(0)(1+h) \qquad \text{——②}$$

然后，如果 $x$ 足够接近 $h$ 的话，就会有

$$f(x)\underset{\text{近似}}{\sim} f'(h)(x-h)+f(h)$$

因此，先将 $x$ 看做 $2h$，（并且使用 $f'(h)=f(h)$）

$$f(2h)\sim f(h)h+f(h)=f(h)(1+h) \text{ (此处将②代入)}$$

$$\sim\{f(0)(1+h)\}(1+h)=f(0)(1+h)^2$$

即，

$$f(2h)\sim f(0)(1+h)^2$$

依次类推，$3h$，$4h$，$5h$，……逐一进行，只要 $mh=1$ 的话，便会有，

$$f(1)=f(mh)\sim f(0)(1+h)^m$$

同理有，

$$f(2)=f(2mh)\sim f(0)(1+h)^{2m}=f(0)\{(1+h)^m\}^2$$

$$f(3)=f(3mh)\sim f(0)(1+h)^{3m}=f(0)\{(1+h)^m\}^3$$

即，

$$f(n)\sim f(0)\times a^n \quad (\text{令 } a=(1+h)^m),$$

由此，可以看出一个大概的指数函数的样子[※注1]。

※注 1

$mh=1$，所以，$h=\dfrac{1}{m}$。于是，有 $f(1)\sim f(0)\left(1+\dfrac{1}{m}\right)^m$。

其中，当 $m\to\infty$ 时，$\left(1+\dfrac{1}{m}\right)^m\to e$。

即，$f(1)=f(0)\times e$，这与之后的内容(第139页)相一致。

PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com

2 其次，既然$f(x)$确实存在，我们就一定要将它找出来。



将$y=f(x)$的反函数写作$x=g(y)$。



$f(x)$的微分，从（☆）中的$f'(x)=f(x)$可知，就是其本身，这一点很清楚。那$g(y)$的微分是什么呢？

$$g'(y)=\frac{1}{f'(x)} \quad \text{——③}$$

通常都是这样[1]。

$$g'(y)=\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{y} \quad \text{——④}$$

由此可见，反函数$g(y)$的微分，具体就是函数$\frac{1}{y}$。

这样的话，我们使用“微积分的基本定理”，可得，

$$\int_1^{\alpha}\frac{1}{y}\,dy=g(\alpha)-g(1) \quad \text{——⑤}$$

我们已经知道$g'(y)=\frac{1}{y}$，那么所谓的$g(\alpha)$，就是对$\frac{1}{y}$从1到$\alpha$积分所得到的函数。

此处，我们先假设$g(1)=0$的话……



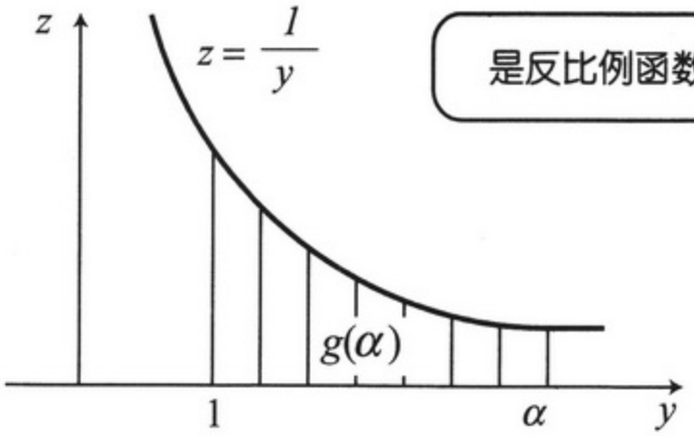
$$g(\alpha)=\int_1^{\alpha}\frac{1}{y}\,dy$$



说的太对了！接下来，画出$z=\frac{1}{y}$的图形看看吧！

1. 如第75页所示，但$y=f(x)$的反函数为$x=g(y)$时，$f'(x)g'(x)=1$。


我的博客 http://book-life.blog.163.com




是反比例函数的图形啊！





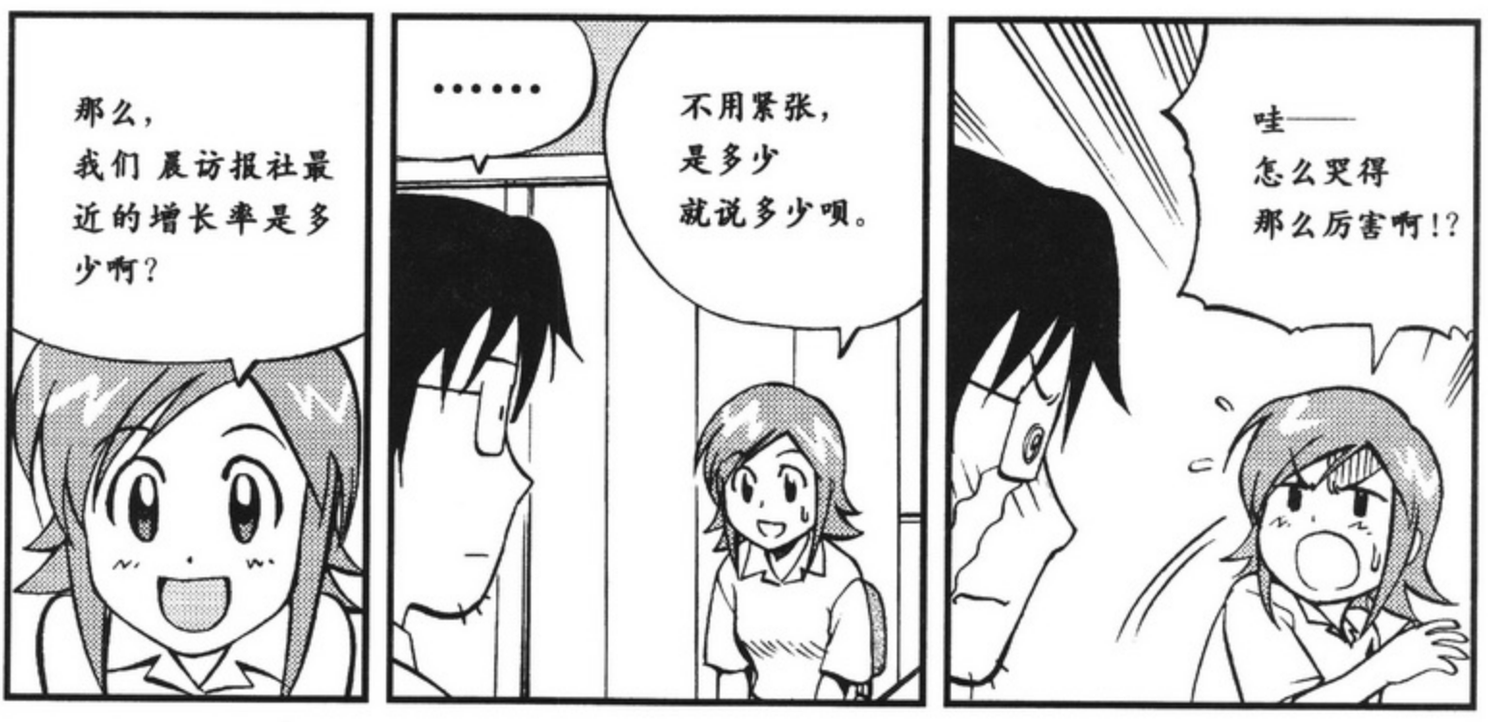
我们将从 1 到 $\alpha$ 的范围内，图形与 $y$ 轴所夹的面积定义为函数 $g(\alpha)$。这就是函数真实的状态。就是说，$g(\alpha)$ 是一个有明确定义的函数，$\alpha$ 可以是分数，也可以是 $\sqrt{2}$。

因为 $z=\frac{1}{y}$ 是一个具体的函数，所以也能够得到确切的面积。



由于 $g(1)=\int_1^1 \frac{1}{y}\,dy=0$，所以，有 $\int_1^\alpha \frac{1}{y}\,dy=g(\alpha)-g(1)$，满足⑤式。这样一来，

我们就可以知道反函数 $g(y)$ 的原形，进而我们也可以知道原函数 $f(x)$ 了。




PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com

## 6 指数函数和对数函数的小结

1 将$\frac{f'(x)}{f(x)}$看作是增长率。

2 满足 $\frac{f'(x)}{f(x)}=1$ 的$y=f(x)$，是增长率为常数 1 的函数。

它是指数函数的一种。并且，满足

$f'(x)=f(x)$ —— ☆

3 将$y=f(x)$的反函数写作 $x=g(y)$，于是，有

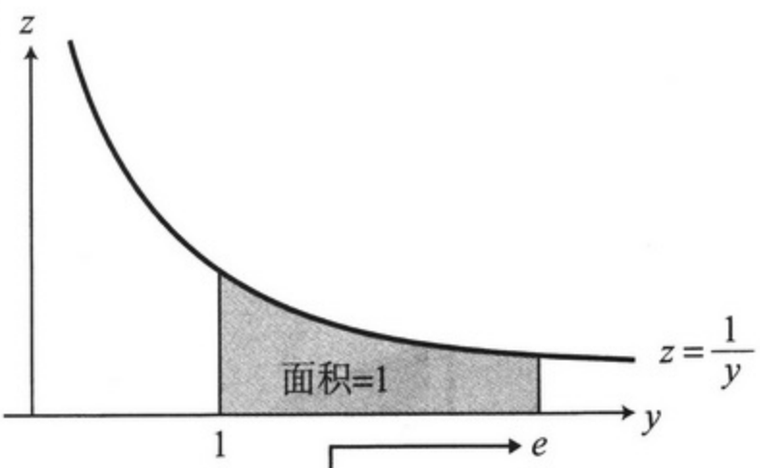
$g'(y)=\frac{1}{y}$ —— ☆☆

4 反比例函数$h(y)=\frac{1}{y}$图形的面积$h(y)$为

$$\int_1^{\alpha}\frac{1}{y}\mathrm{d}y$$

将它定义为 $g(\alpha)$，此函数满足☆☆以及 $g(1)=0$，是$f(x)$的反函数。

5




使得 $g(y)=1$ 的 $y$，也就是将从 1 到$\alpha$ 的范围内 $\frac{1}{y}$ 与 $y$ 轴所夹的面积为1的$\alpha$，记为$e$(称为自然对数的底)

$e$ 是一个约为 2.7 的无理数。


我的博客 http://book-life.blog.163.com

因为$f(x)$为指数函数，可以将其写作

$f(x)=a_0a^x$　（其中 $a_0$ 为常数），于是有

$f(g(1))=f(0)=a_0a^x=a_0$。

又因为 $f(g(1))=1$，所以有 $a_0=1$，

即　$f(x)=a^x$。

同理，

$f(g(e))=f(1)=a^1$，

又因为 $f(g(e))=e$，

所以，$e=a^1$。

综合以上可知，$f(x)=e^x$。

反函数$g(y)$为 $\log_e y$（也可以写作 $\ln y$，底数为 $e$ 的情况通常做如此简写）。

将之前 [1]~[5] 中的$f(x)$和 $g(y)$，改写成$e^x$ 和 $\ln y$

[6] $f'(x)=f(x)\Leftrightarrow(e^x)'=e^x$

[7] $g'(y)=\frac{1}{y}\Leftrightarrow(\ln y)'=\frac{1}{y}$

[8] [4] $\Leftrightarrow\int_1^y\frac{1}{y}\,dy=\ln y$

[9] 比特的函数$2^x$是对全体实数定义的，也可以将其写成

$f(x)=e^{(\ln 2)x}$　（$x$为全体实数）。

这是因为$e^x$和$\ln y$是互为反函数的关系，所以

$e^{\ln 2}=2$

因此，对于全体自然数 $x$ 有

$f(x)=(e^{\ln 2})^x=2^x$。

PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com

$$\frac{1}{x}=x^{-1},\quad \frac{1}{x^2}=x^{-2},\quad \frac{1}{x^3}=x^{-3},\quad \cdots$$

$$\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}},\quad \sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}},\quad \sqrt[5]{x^4}=x^{\frac{4}{5}},\quad \frac{1}{\sqrt[4]{x}}=x^{-\frac{1}{4}},\quad \cdots$$

诸如以上种种函数都可以表示成$f(x)=x^{\alpha}$的形式。

此时，通常有如下公式成立。

**公式 4-2 | 幂函数的微分公式**

对于$f(x)=x^{\alpha}$，有$f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$

**(例)**

对于$f(x)=\frac{1}{x^3}$，有　　$f'(x)=(x^{-3})'=-3x^{-4}=-\frac{3}{x^4}$

对于$f(x)=\sqrt[4]{x}$，有　　$f'(x)=(x^{\frac{1}{4}})'=\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}=\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$

**(证明)**

因为$e^{\ln x}=x$，所以我们可以将$f(x)$表示成如下形式：

$f(x)=x^{\alpha}=(e^{\ln x})^{\alpha}=e^{\alpha \ln x}$。

因此，

$$\ln f(x)=\alpha \ln x。$$

两边同时微分后，

$$\frac{1}{f(x)}\times f'(x)=\alpha\times\frac{1}{x}$$

所以，

$$f'(x)=\alpha\times\frac{1}{x}\times f(x)=\alpha\times\frac{1}{x}\times x^{\alpha}=\alpha\times x^{\alpha-1}$$


我的博客 http://book-life.blog.163.com

## 分部积分公式

设$h(x)=f(x)g(x)$，则由积的微分公式，可得

$$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)。$$

所以可知，微分后为$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$的函数(原函数)就是$f(x)g(x)$，

根据微积分的基本定理可得，

$$\int_a^b (f'(x)g(x)+f(x)g'(x))\mathrm{d}x=f(b)g(b)-f(a)g(a)。$$

结合和的积分公式，便可以得到如下公式。

**公式 4-3 | 分部积分公式**

$$\int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x+\int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x=f(b)g(b)-f(a)g(a)$$

(**应用举例**) 求$\int_0^{\pi} x\sin x\mathrm{d}x$。

根据分部积分公式，设 $f(x)=x$, $g(x)=\cos x$, $a=0$, $b=\pi$。于是，有

$$\int_0^{\pi} (x)'\cos x\,\mathrm{d}x+\int_0^{\pi} x(\cos x)'\mathrm{d}x=\pi\cos\pi-0\times\cos 0,$$

$$\int_0^{\pi} \cos x\,\mathrm{d}x-\int_0^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x=-\pi。$$

因此，可得

$$\int_0^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi} \cos x\,\mathrm{d}x+\pi=\sin\pi-\sin 0+\pi=\pi。$$

PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com

## 第4章 本章习题

**1.** (1) $\tan x$ 是通过 $\dfrac{\sin x}{\cos x}$ 定义的函数，求 $\tan x$ 的导函数。

(2) 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$。

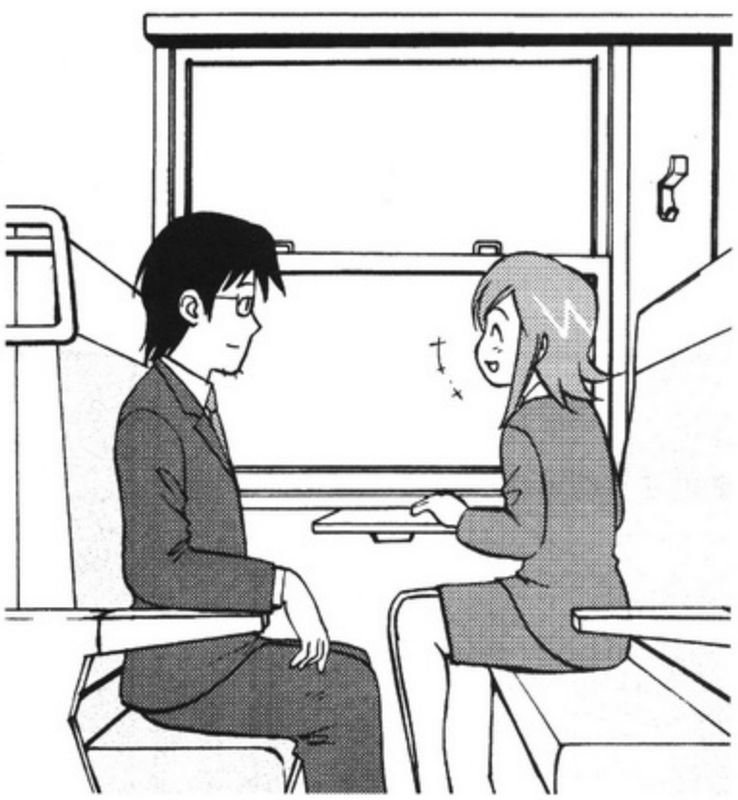
**2.** 求令 $f(x)=xe^x$ 中$x$的最小值。

**3.** 求 $\int_1^e 2x\ln x\,\mathrm{d}x$。

(提示：设 $f(x)=x^2, g(x)=\ln x$，再进行分部积分)


我的博客 http://book-life.blog.163.com

# 第5章
# 泰勒展开



PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com





我的博客 http://book-life.blog.163.com




PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com

















我的博客 http://book-life.blog.163.com
















1. 泰勒展开：Taylor's Expansion。

PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com




※注1　$(1+x)^n=1+C_n^1x+C_n^2x^2+C_n^3x^3+\cdots+C_n^nx^n$

这个是二项式展开公式，其中 $C_n^r=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$

$C_n^1=n$，$C_n^2=\dfrac{n(n-1)}{2}$，$C_n^3=\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$，…，$C_n^r=\dfrac{n(n-1)\cdots\{n-(r-1)\}}{r!}$


我的博客 http://book-life.blog.163.com













PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com

**公式 5-1 | 二次近似公式**

$$(1+x)^n \underset{\text{近似}}{\sim} 1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2$$



将这个式子稍微做一下变形，就能得到一个很有趣的法则。

对于一组满足$nx=0.7$的$n$和$x$来说，

$$(1+x)^n \sim 1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2 \sim 1+nx+\frac{1}{2}(nx)^2-\underbrace{\frac{1}{2}nx^2}$$

因为很接近0而被忽略。

$$\sim 1+0.7+\frac{1}{2}\times 0.7^2=1.945\sim 2$$

就是说，如果$nx=0.7$，则$(1+x)^n$约等于2。将其看待成法则的话，

[不利于借款人的计算方法]

(借款年数)×(利率)=0.7时，还款额约为借款额的2倍。

2%的利率借35年，还款金额约为2倍。

10%的利率借7年，还款金额约为2倍。

35%的利率借2年，还款金额约为2倍。



哎呀~~~~~

好恐怖啊~~~~~



我的博客 http://book-life.blog.163.com



再说说 $x^n$ 中 $n$ 是 2 以上的高次幂的情况。

通过这种二次函数做近似，是相当有趣的事情。在此，我们再来思考一下利用更高次幂多项式做近似的情况。实际上，给出“无限次”多项式，并不是在做“近似”，而是进行“完整地”展开，请你了解这一点。

例如，$f(x)=\dfrac{1}{1-x}$，

$$(f(x)=)\ \frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots\text{(无限延续下去)} \qquad \text{——}\ ①$$

注意！这里不是~而是“=”！



这个
不对吧，
变成“=”了！

这么说的话，
那你就
具体算一下，
试试看吧。



令 $x=0.1$，

于是，有 $f(0.1)=\dfrac{1}{1-0.1}=\dfrac{1}{0.9}=\dfrac{10}{9}$

右边为：$1+0.1+0.1^2+0.1^3+0.1^4+\cdots$

$=1+0.1+0.01+0.001+0.0001+\cdots$

$=1.1111111\cdots$

然后，再具体计算一下 $\dfrac{10}{9}$ ⟶

$$\begin{array}{r} 1.111\cdots \\ 9\overline{)\,10} \\ \underline{9} \\ 10 \\ \underline{9} \\ 10 \\ \underline{9} \\ 10 \\ \underline{9} \\ \vdots \end{array}$$

两者正好相一致。

PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com

一般的函数(不过，要能够无限次地进行微分)$f(x)$，能被表示成如下形式时，

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

我们就将右边称为$f(x)$的“**泰勒(Taylor)展开**”。



这个公式，在包含$x=0$的某个限制区域内，才意味着函数$f(x)$同无限次多项式是完全一致的。然而，一旦超出了这个限制区域，那就意味着右边将会变成一个“无法确定”的数，请务必注意！

例如，在刚刚①式的两边代入$x=2$。

$$\text{左边}=\frac{1}{1-2}=-1$$

$$\text{右边}=1+2+4+8+16+\cdots\rightarrow$$

瞧，是不是变成一个无法确定的数了？



(顺便指出，式子①只有对满足$-1<x<1$的$x$才是成立的。这就是泰勒展开的限制区间。特别地，我们将这个$-1<x<1$称为收敛域[1]。)

1. 收敛域：Circle of Convergence。


我的博客 http://book-life.blog.163.com

## 2 泰勒展开的求解方法

对于$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n+\cdots$ —— ②

试着求系数$a_n$是多少。

首先，代入$x=0$，由$f(0)=a_0$,可知0次常数项$a_0$为$f(0)$。 —— (A)

然后，对②进行微分。

$f'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots$ —— ③

将$x=0$代入③，由$f'(0)=a_1$,可知一次系数$a_1$为$f'(0)$。

—— (B)

继续对③进行微分。

$f''(x)=2a_2+6a_3x+\cdots+n(n-1)a_nx^{n-2}+\cdots$ —— ④

代入$x=0$，可知二次系数$a_2$为$\frac{1}{2}f''(0)$。 —— (C)

对④进行微分，

$f'''(x)=6a_3+\cdots+n(n-1)(n-2)a_nx^{n-3}+\cdots$,

由此可知，三次系数$a_3$为$\frac{1}{6}f'''(0)$。 —— (D)

持续进行这种运算，$n$次微分后，就应该得到

$f^{(n)}(x)=n(n-1)\cdots\times2\times1a_n+\cdots$,

其中$f^{(n)}(x)$表示$n$次微分后的$f(x)$。

由此可知，$n$次系数$a_n$为$\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)$。

$n!$，读作“$n$的阶乘”，它表示$n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times2\times1$。

PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com

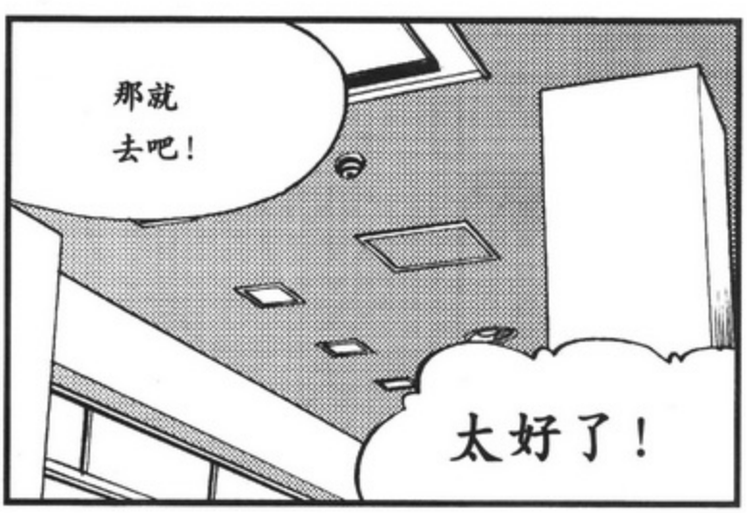




我的博客 http://book-life.blog.163.com





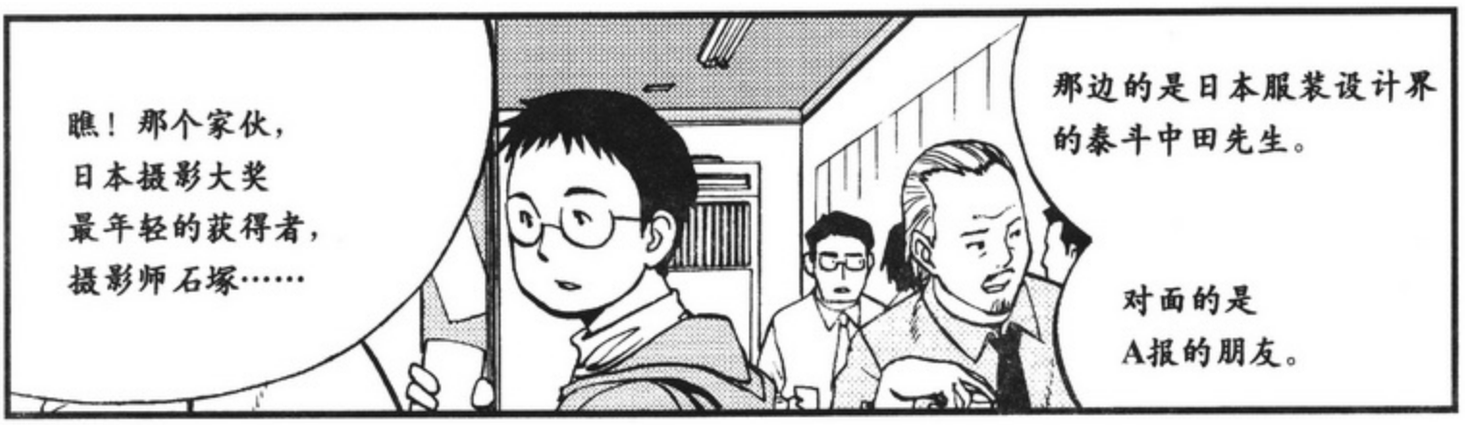







PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com











我的博客 http://book-life.blog.163.com

**公式 5-2 | 泰勒展开公式**

对$f(x)$进行泰勒展开，便有

$$f(x)=f(0)+\frac{1}{1!}f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\frac{1}{3!}f'''(0)x^3+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n+\cdots$$

上述公式中，

| | | | |
|---|---|---|---|
| $f(0)$ | ←0次的常数项 | $a_0=f(0)$ | —— (A) |
| $f'(0)\,x$ | ←1次项 | $a_1=f'(0)$ | —— (B) |
| $\frac{1}{2!}f''(0)\,x^2$ | ←2次项 | $a_2=\frac{1}{2}f''(0)$ | —— (C) |
| $\frac{1}{3!}f'''(0)\,x^3$ | ←3次项 | $a_3=\frac{1}{6}f'''(0)$ | —— (D) |

关于进行“泰勒展开”的条件或者收敛域的介绍，此处从略。

使用这个公式，验证一下第151页的①看看吧。

$$f(x)=\frac{1}{1-x},\quad f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2},\quad f''(x)=\frac{2}{(1-x)^3},\quad f'''(x)=\frac{6}{(1-x)^4}\cdots$$

$$f(0)=1,\ f'(0)=1,\ f''(0)=2,\ f'''(0)=6,\ \cdots,\ f^{(n)}(0)=n!\cdots$$

所以，

$$\begin{aligned}f(x)&=f(0)+\frac{1}{1!}f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\frac{1}{3!}f'''(0)x^3+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n+\cdots\\&=1+x+\frac{1}{2!}\times 2x^2+\frac{1}{3!}\times 6x^3+\cdots+\frac{1}{n!}n!x^n+\cdots\\&=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots\end{aligned}$$






现在的公式是“在 $x=0$ 附近相一致的无限次多项式”。不过，一般地，在 $x=a$ 附近的相一致的多项式的公式，如下所示，请大家在第176页的练习问题中再做验证吧！

$$f(x)=f(a)+\frac{1}{1!}f'(a)(x-a)+\frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2$$

$$+\frac{1}{3!}f'''(a)(x-a)^3+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^{(n)}+\cdots$$



因此，可以说泰勒展开是一种函数近似的好方法。

PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com

# 3 各种函数的泰勒展开

## 1 平方根的泰勒展开

设 $f(x)=\sqrt{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{2}}$

$f'(x)=\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}$

$f''(x)=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\ (1+x)^{-\frac{3}{2}}$

$f'''(x)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\ (1+x)^{-\frac{5}{2}}\cdots$

因此，

由 $f(0)=\frac{1}{2}$，$f''(0)=-\frac{1}{4}$，$f'''(0)=\frac{3}{8}$，…

可得，

$f(x)=\sqrt{1+x}$

$=1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2!}\times\left(-\frac{1}{4}\right)x^2+\frac{1}{3!}\ \frac{3}{8}x^3+\cdots$

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3\cdots$$

## 2 指数函数 $e^x$ 的泰勒展开

设 $f(x)=e^x$

$f'(x)=e^x$、$f''(x)=e^x$、$f'''(x)=e^x$、…

因此，

$1=f(0)=f'(0)=f''(0)=f'''(0)=\cdots$

$$e^x=1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots$$

将 $x=1$ 代入，

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots$$

在第4章中
我们曾经讲过
$e$ 约等于2.7，
在此，给出完整的计算公式。



## 3 对数函数 $\ln(1+x)$ 的泰勒展开

设 $f(x)=\ln(1+x)$

$f'(x)=\frac{1}{1+x}=(1+x)^{-1}$

$f''(x)=-(1+x)^{-2}$、$f'''(x)=2(1+x)^{-3}$、

$f''''(x)=-6(1+x)^{-4}$、…，于是

$f(0)=0$、$f'(0)=1$、$f''(0)=-1$、$f'''(0)=2!$、

$f''''(0)=-3!\cdots$

因此，

$$\ln(1+x)=0+x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3!}\times2!\times x^3-\frac{1}{4!}3!\times x^4\cdots$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}x^n+\cdots$$

## 4 三角函数的泰勒展开

令 $f(x)=\cos$

$f'(x)=-\sin x$、$f''(x)=-\cos x$、$f'''(x)=\sin x$、

$f''''(x)=\cos x$、…

于是，$f(0)=1$、$f'(0)=0$、$f''(0)=-1$、

$f'''(0)=0$、$f''''(0)=1$、…

因此，

$$\cos x=1+0x-\frac{1}{2!}\times1\times x^2+\frac{1}{3!}\times0\times x^3+\frac{1}{4!}\times1\times x^4+\cdots$$

$$\cos x=1-\frac{1}{2!}\times x^2+\frac{1}{4!}x^4+\cdots(-1)^n\frac{1}{(2n)!}x^{2n}+\cdots$$

同理可证，

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}\times x^3+\frac{1}{5!}x^5\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1}+\cdots$$



我的博客 http://book-life.blog.163.com

## 4 从泰勒展开中能知道些什么



泰勒展开就是将复杂的函数改写成多项式。
比如说 $\ln(1+x)$ 的图形，你画得出来吗？



毕竟，要将复杂的函数世界解释清楚，做“近似”是一种必要的手段。

刚刚的例子，使用了 $\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\cdots$
想想看你能从泰勒展开中得出什么结论。



$$\ln(1+x)=\underbrace{0}_{0\text{次近似}}+\underbrace{x}_{1\text{次近似}}-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\cdots$$

（3次近似：$x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3$；2次近似：$x-\frac{1}{2}x^2$）

首先看 0 次近似，在 $x=0$ 附近时有 $\ln(1+x)\sim 0$，
这意味着什么呢？

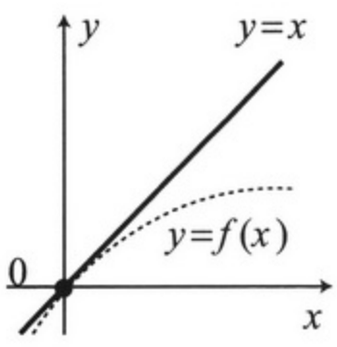


嗯、嗯……就是说，它意味着在 $x=0$ 处，$f(x)$ 的值为 0，
说明图形经过点 $(0,\ 0)$。



说的没错。接下来看一次近似，
在 $x=0$ 附近，可知 $y=f(x)$ 大约
近似成 $y=x$。所以，这就意味着
在 $x=0$ 处，函数处于递增的状态。

（一次近似：切线方程）



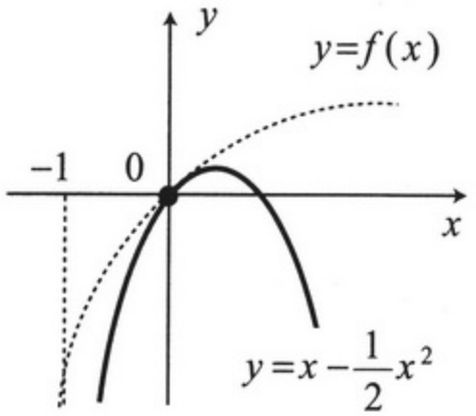

PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com



再进一步看二次近似，
在 $x=0$ 附近，想想看

$$\ln(1+x)\sim x-\frac{1}{2}x^2$$

的图形。这意味着什么呢？





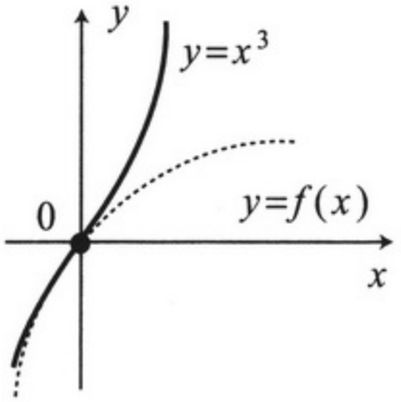

这意味着在 $x=0$ 附近，$y=f(x)$ 大约近似 $y=x-\frac{1}{2}x^2$，因此，在 $x=0$ 处，函数的图形是向上凸起的。
(二次近似：$x=a$ 处的凹凸特性)



保险起见的三次近似!!
在 $x=0$ 附近，

$$\ln(1+x)\sim x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3$$

(三次近似：对二次近似的误差的修正。)

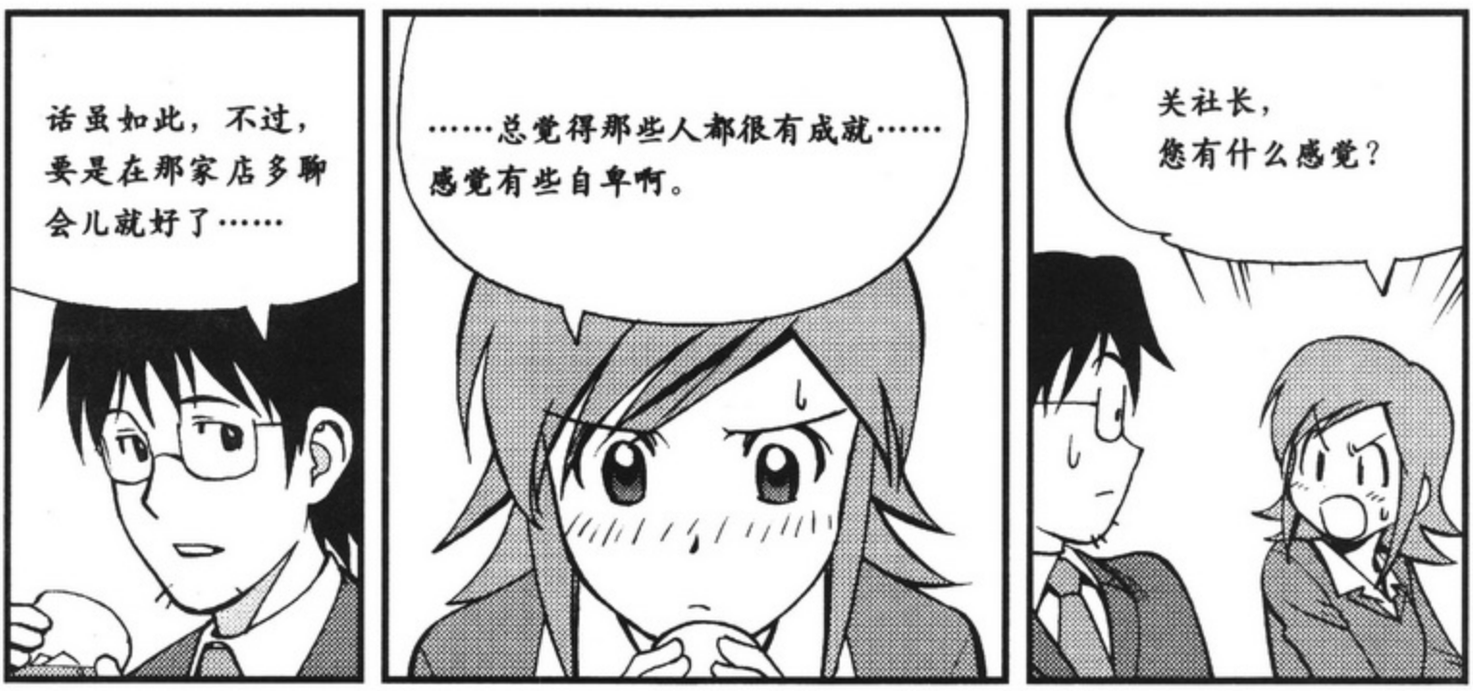


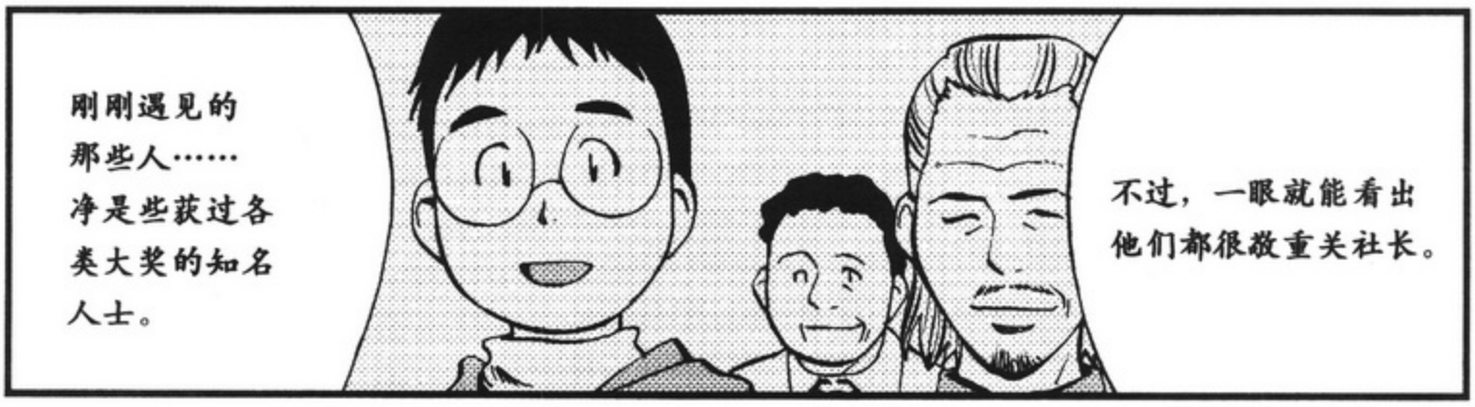





我的博客 http://book-life.blog.163.com




PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com













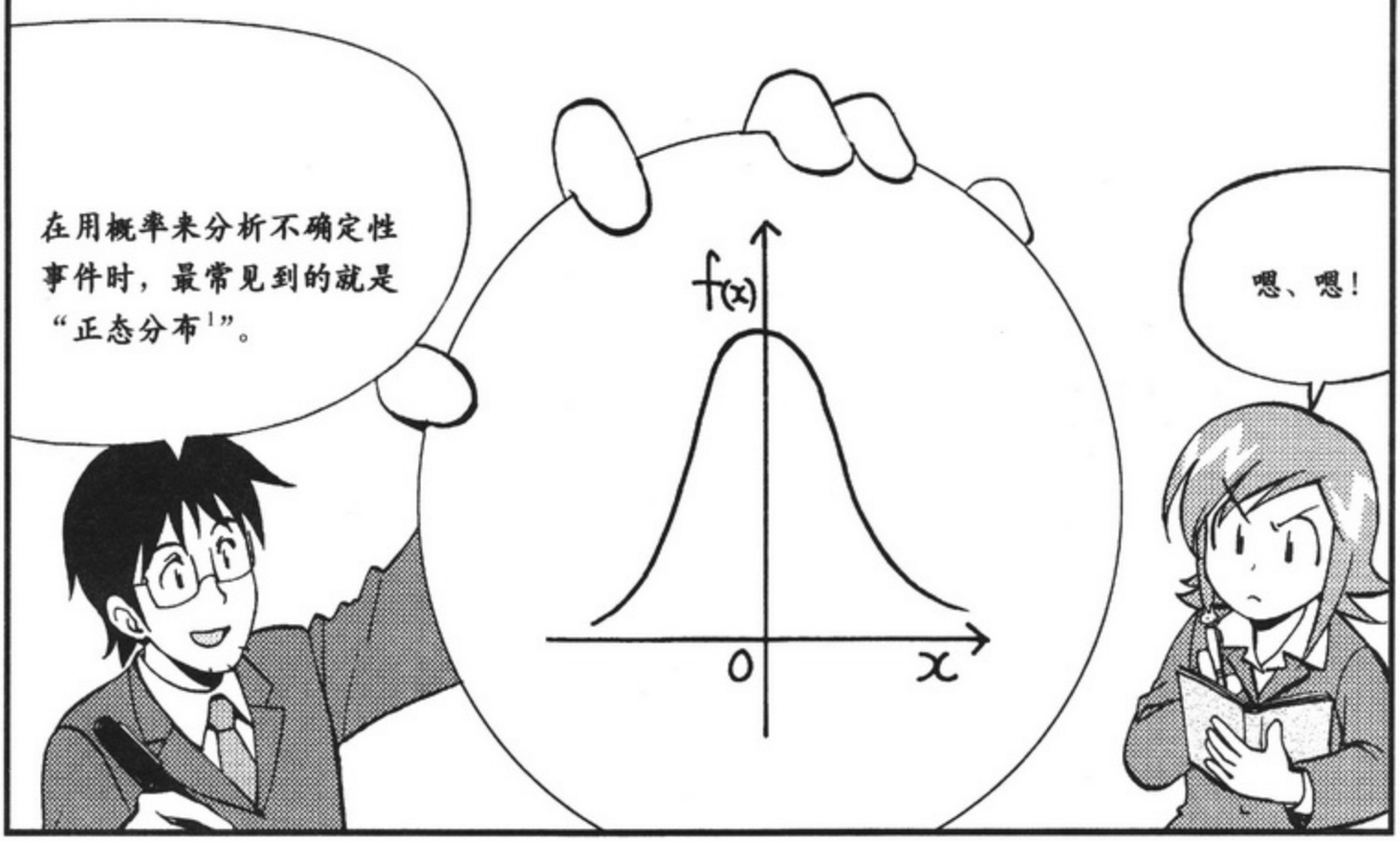




我的博客 http://book-life.blog.163.com




PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com










1. 正态分布：Normal Distribution。


我的博客 http://book-life.blog.163.com

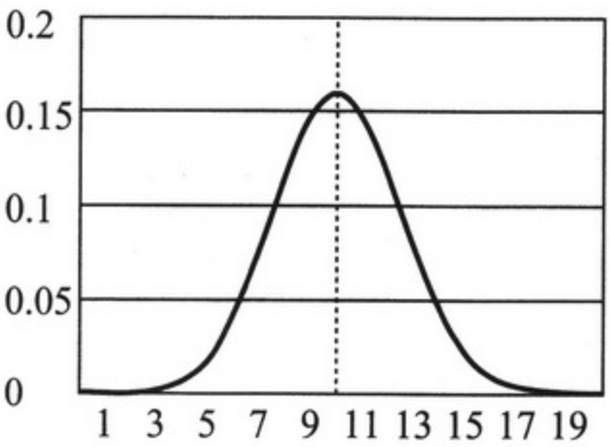
在此，为了让你便于理解，我们使用泰勒展开来说明一下投硬币这件事也是服从正态分布的。

抛出硬币后，
出现正面的概率是？

呼

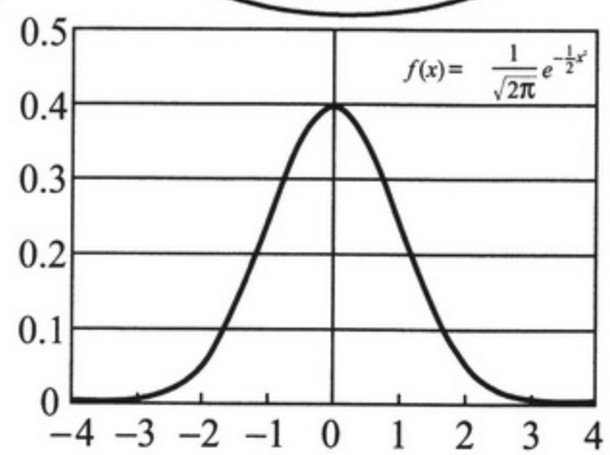
连傻子都知道，是$\frac{1}{2}$！

是的，究竟出现哪面是不确定的，不过两个面出现的概率都一定是$\frac{1}{2}$。



抛出20枚硬币时出现正面的枚数

上面这幅图就是一下子投出20枚硬币后，将出现正面的枚数作为横坐标，同时将出现该枚数的概率作为纵坐标画成的图。

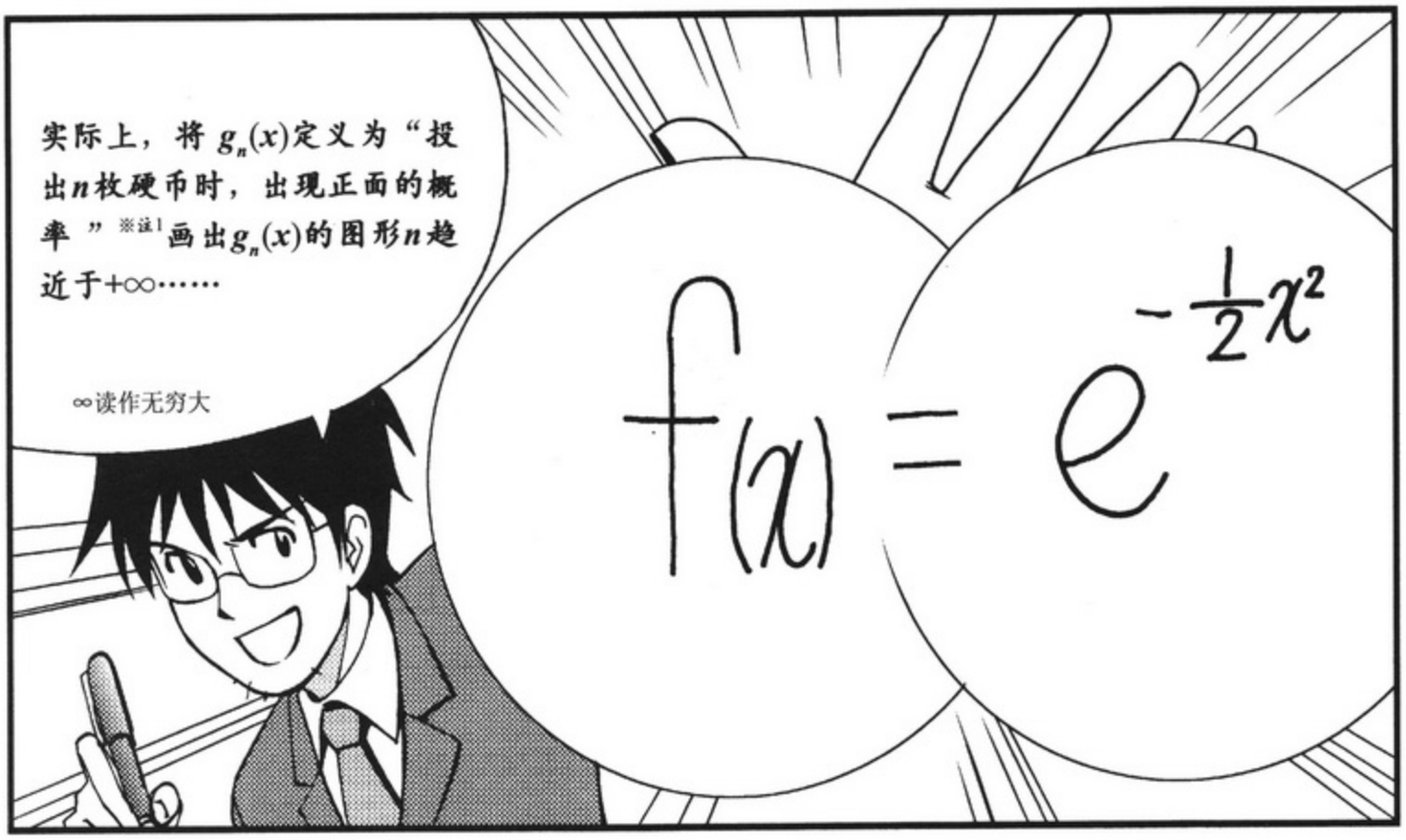


标准正态分布

啊，
很像下面这幅图。

没错，正态分布的图形几乎都是可以重叠的。

PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com







※注 1

投出 $n$ 枚硬币后，可以用二项式分布来概括所有出现 $x$ 枚正面的概率。

例如，求投出 5 枚硬币后，出现 3 枚正面的概率。

出现“正正反正反”的概率为

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^5$$

另外，这种情况有为 $C_5^3$ 种，所以其概率为 $C_5^3\left(\frac{1}{2}\right)^5$。通常写作 $C_n^x\left(\frac{1}{2}\right)^n$。


我的博客 http://book-life.blog.163.com

用二项式分布
将$g_n(x)$写作……

$$g_n(x)=C_n^x\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{n-x}$$

$$=C_n^x\left(\frac{1}{2}\right)^n$$



……
如上形式。

$f(x)$的图形以$x=0$为中心左右对称，$g_n(x)$的图形以$x=\frac{n}{2}$为中心左右对称。




以$g_n\left(\frac{n}{2}\right)$为基准
重新做一下试试看。

首先……

$$g_n\left(\frac{n}{2}\right)=C_n^{\frac{n}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

做除法……

$$h_n(x)=\frac{g_n(x)}{g_n\left(\frac{n}{2}\right)}=\frac{C_n^x}{C_n^{\frac{n}{2}}}$$

想想这个$h_n$

于是，有

$$g_n(x)=g_n\left(\frac{n}{2}\right)\times h_n(x)$$

可写作，

$$C_n^x=\frac{n!}{x!(n-x)!},\quad C_n^{\frac{n}{2}}=\frac{n!}{\left(\frac{n}{2}\right)!\left(\frac{n}{2}\right)!}$$

因此，

$$h_n(x)=\frac{\left(\frac{n}{2}\right)!\left(\frac{n}{2}\right)!}{x!(n-x)!}$$

PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com
















我的博客 http://book-life.blog.163.com

就是说，

$$x=\frac{n}{2}+\frac{\sqrt{n}}{2}\times 1 \longrightarrow z=1$$

$$x=\frac{n}{2}+\frac{\sqrt{n}}{2}\times 2 \longrightarrow z=2$$

$$x=\frac{n}{2}+\frac{\sqrt{n}}{2}\times 3 \longrightarrow z=3$$

……

以此类推，进行变量替换。



规定 $z$ 满足 $\frac{n}{2}+\frac{\sqrt{n}}{2}z=x$，并将其代入 $h_n$。

$$h_n(x)=\frac{\left(\frac{n}{2}\right)!\left(\frac{n}{2}\right)!}{\left(\frac{n}{2}+\frac{\sqrt{n}}{2}z\right)!\left(\frac{n}{2}-\frac{\sqrt{n}}{2}z\right)!}$$

$$\left(n-\left(\frac{n}{2}+\frac{\sqrt{n}}{2}z\right)\right)$$

两边取对数※注1。

$$\ell n\, h_n(x)$$

$$=\ell n\left(\frac{n}{2}\right)!+\ell n\left(\frac{n}{2}\right)!-\ell n\left(\frac{n}{2}+\frac{\sqrt{n}}{2}z\right)!-\ell n\left(\frac{n}{2}-\frac{\sqrt{n}}{2}z\right)!$$



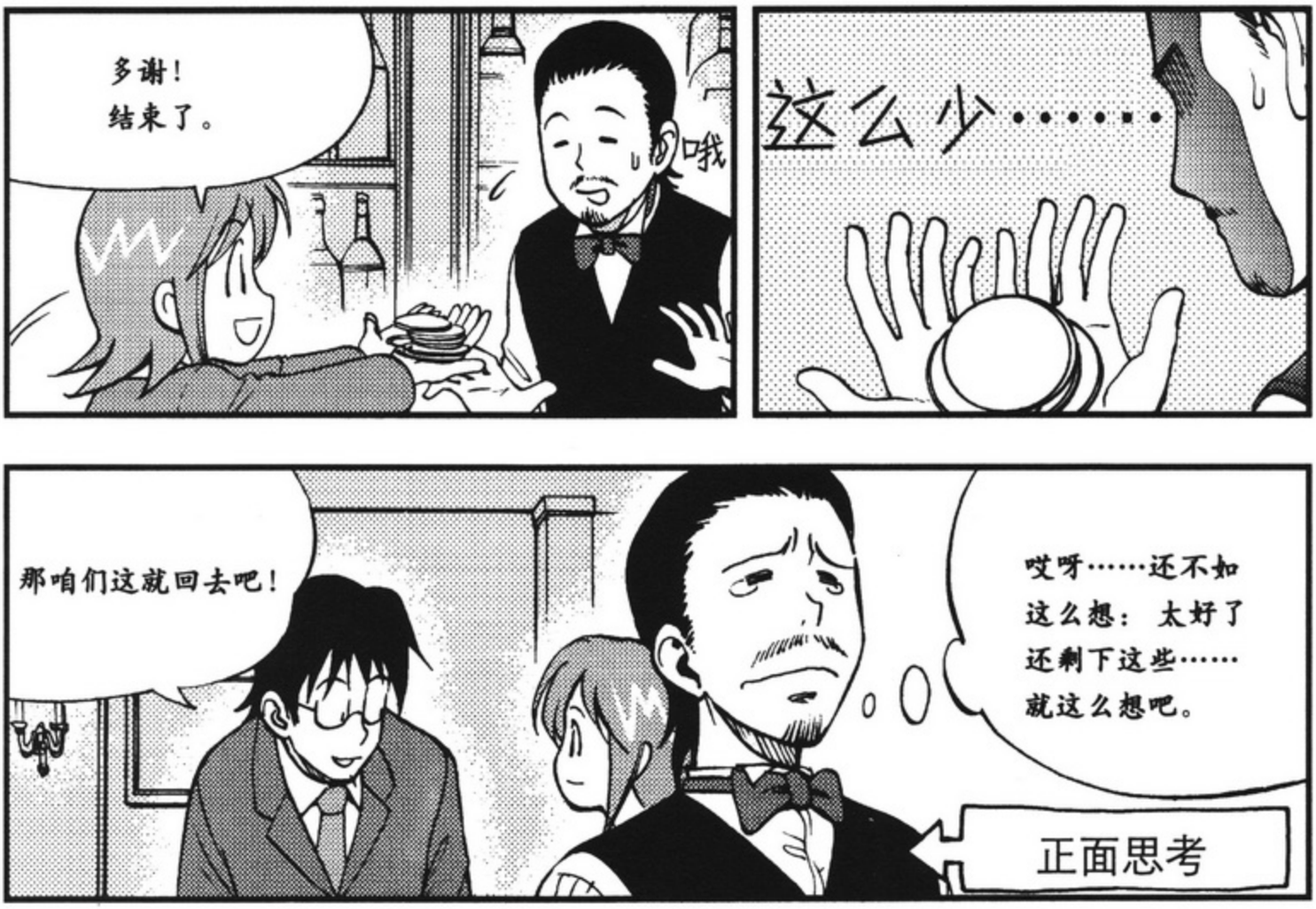
我们换个地方，再来计算这个吧！



※注1　此处使用 $\ln ab=\ln a+\ln b$

$$\ln\frac{d}{c}=\ln d-\ln c$$

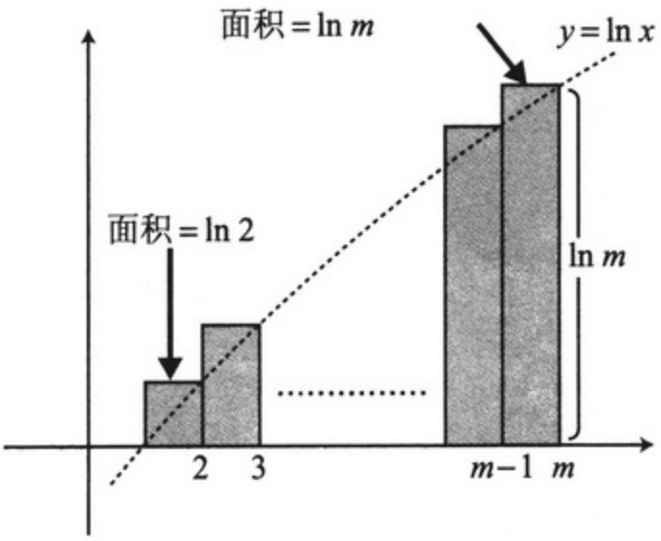
PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com




对 $\ln(m!)$ 做近似。

$\ln m! = \ln 1 + \ln 2 + \ln 3 + \cdots + \ln m$

如右图所示，就是在 $\ln x$ 的图形下所覆盖的长方形的面积。




$$\ln 2 + \cdots + \ln m \underset{\text{近似}}{\sim} \int_1^m \ln x \, dx$$

$$(x \ln x - x)' = \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln x$$

因此，

$$\begin{aligned}\int_1^m \ln x \, dx &= (m \ln m - m) - (1 \ln - 1) \\ &= m \ln m - m + 1 \\ &= m(\ln m - 1) + 1\end{aligned}$$

所以，可以得到如此近似：$\ln m! \underset{\text{近似}}{\sim} m \ln m$。


我的博客 http://book-life.blog.163.com




$$\ln h_n(x) \underset{近似}{\sim} \frac{n}{2}\ln\frac{n}{2} + \frac{n}{2}\ln\frac{n}{2} - \left(\frac{n}{2}+\frac{\sqrt{n}}{2}z\right)\ln\left(\frac{n}{2}+\frac{\sqrt{n}}{2}z\right) - \left(\frac{n}{2}-\frac{\sqrt{n}}{2}z\right)\ln\left(\frac{n}{2}-\frac{\sqrt{n}}{2}z\right)$$

整理，得

$$\ln h_n(x) \underset{近似}{\sim} -\left[\left(\frac{n}{2}+\frac{\sqrt{n}}{2}z\right)\ln\left(1+\frac{\sqrt{n}}{n}z\right) + \left(\frac{n}{2}-\frac{\sqrt{n}}{2}z\right)\ln\left(1-\frac{\sqrt{n}}{n}z\right)\right]$$

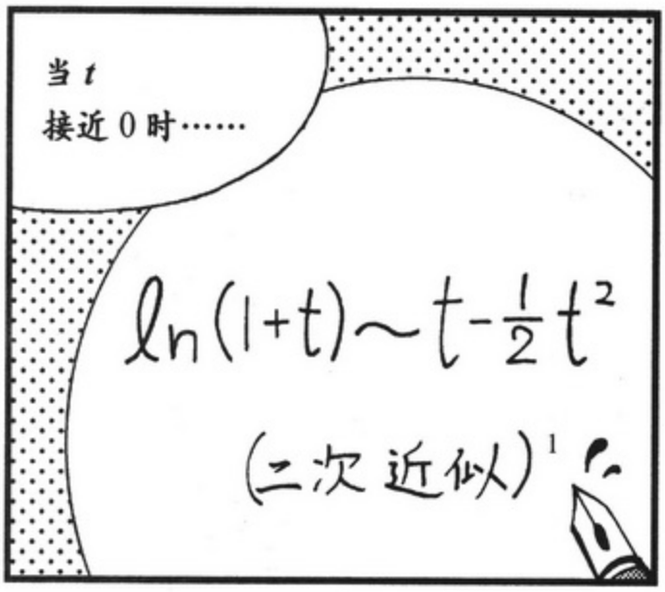
（上式经过了如此变形：$\ln\left(\frac{n}{2}+\frac{\sqrt{n}}{2}z\right) = \ln\left\{\frac{n}{2}\left(1+\frac{\sqrt{n}}{2}z\right)\right\} = \ln\frac{n}{2} + \ln\left(1+\frac{\sqrt{n}}{2}z\right)$）





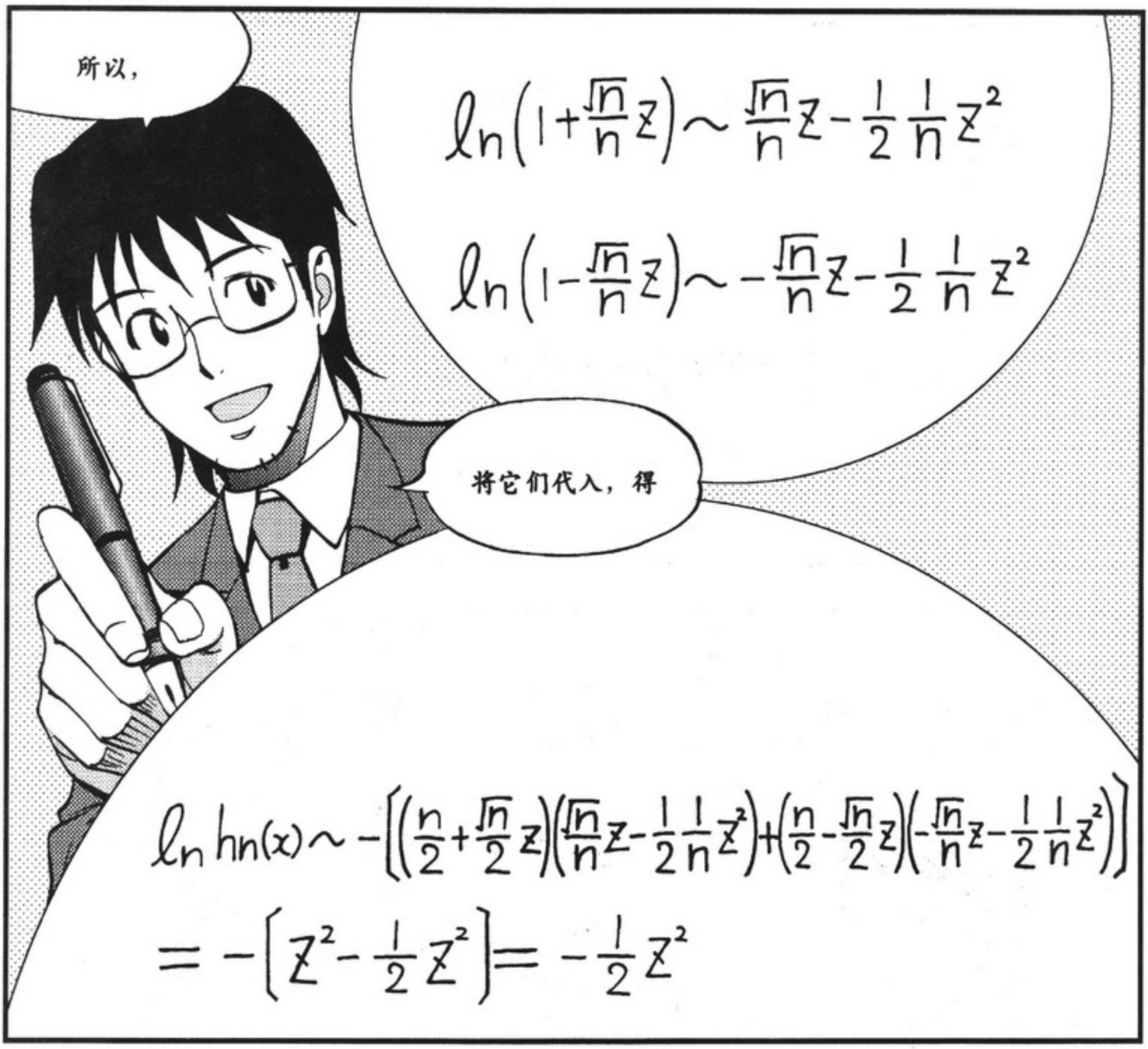


PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com





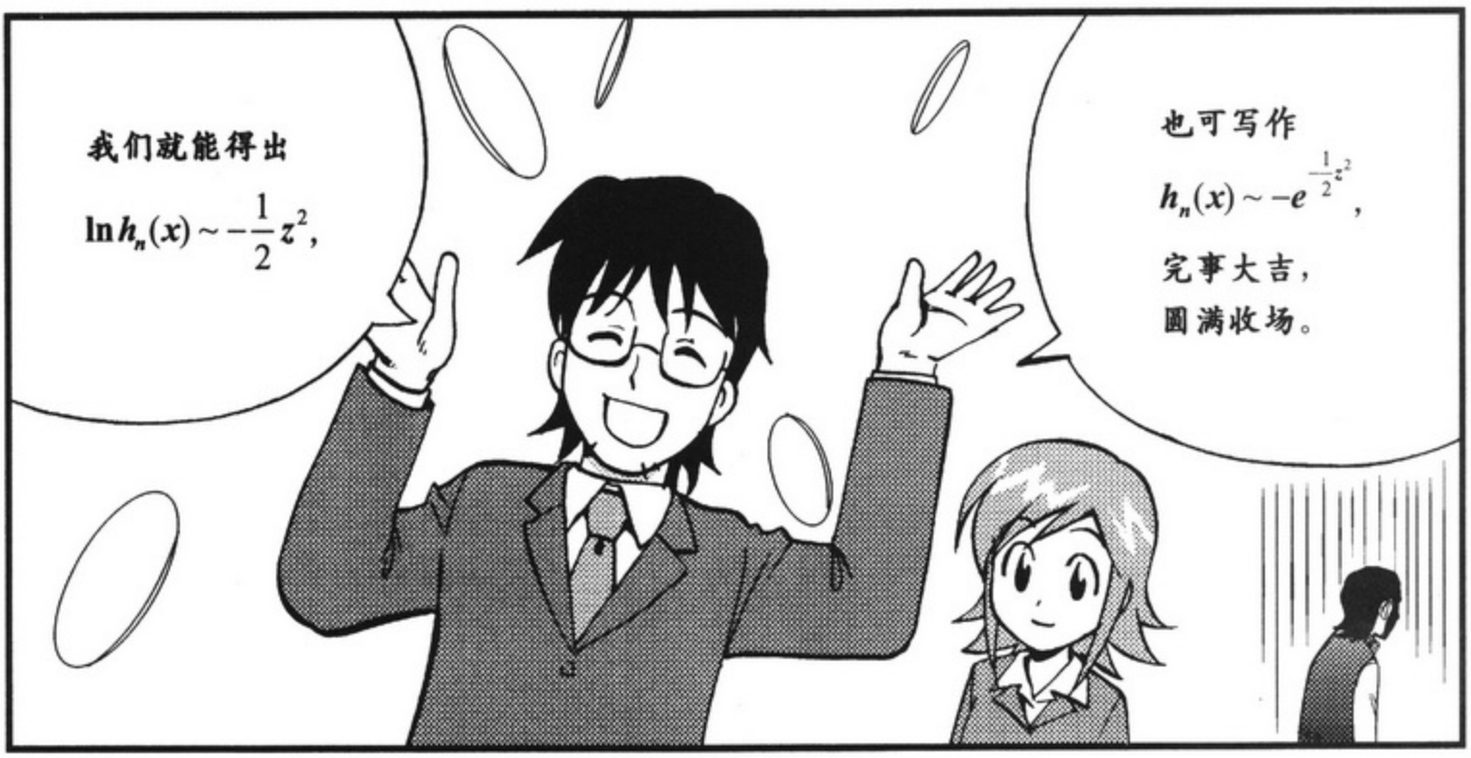


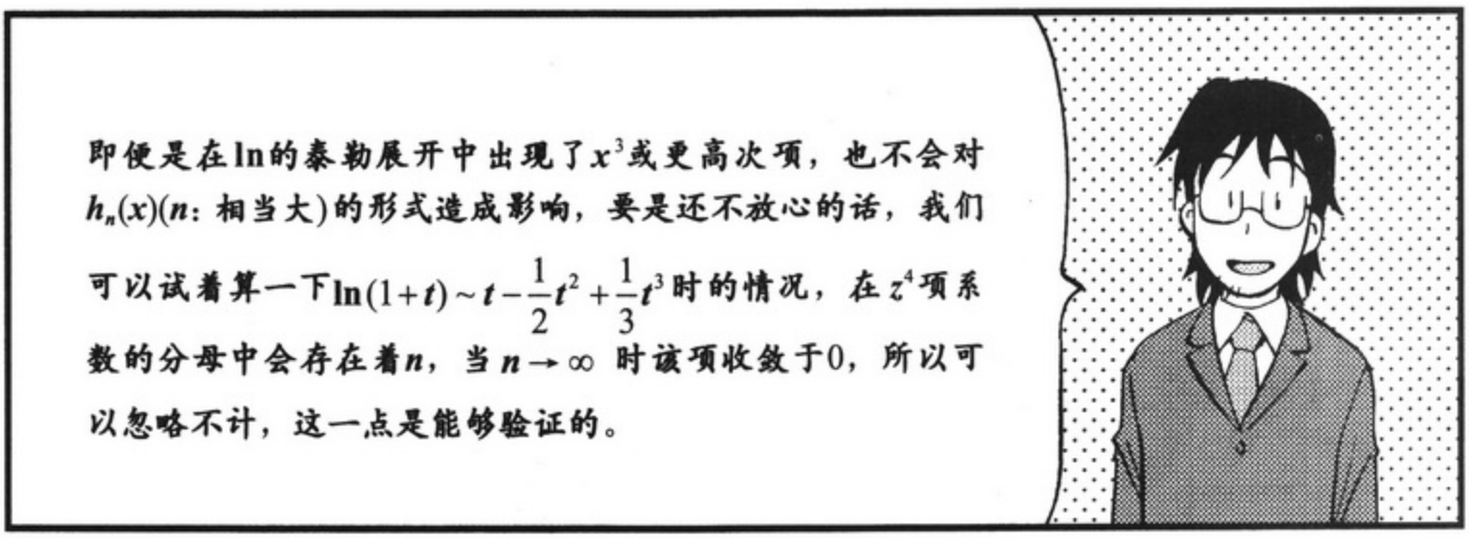


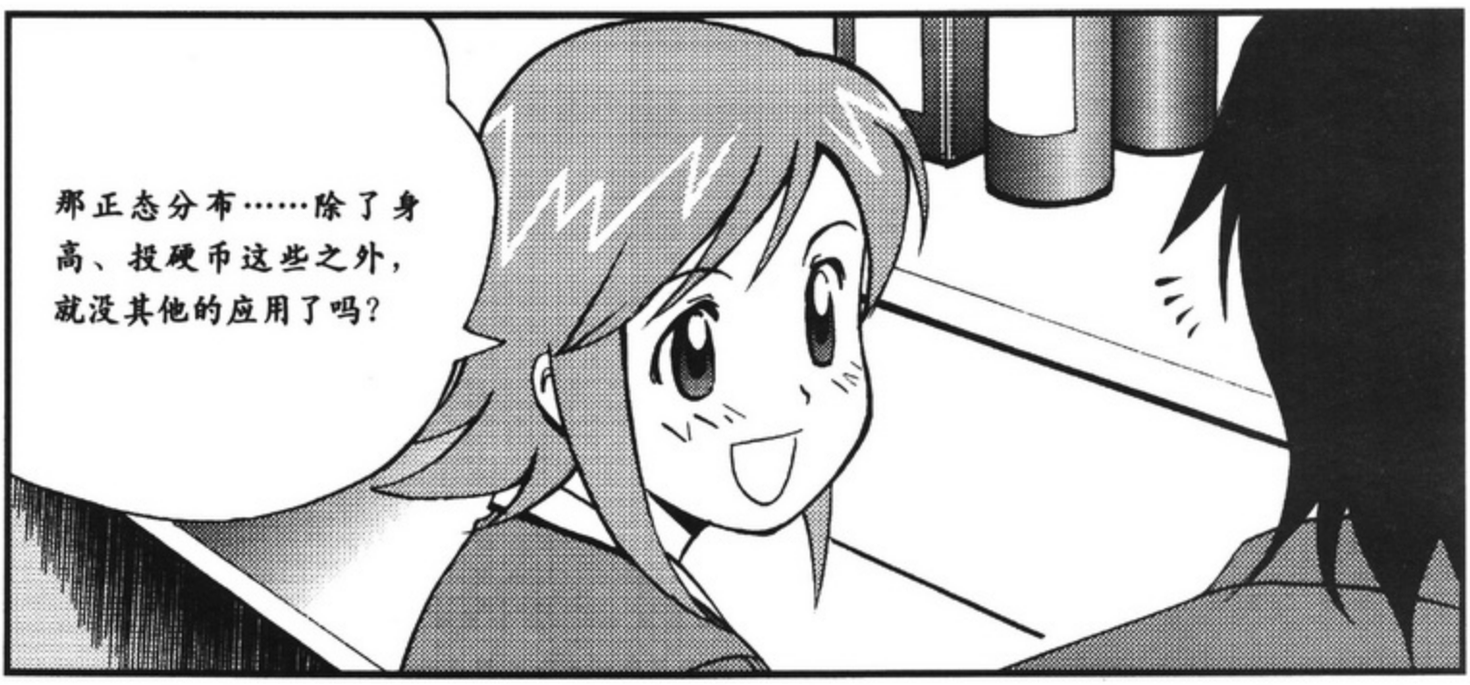

1. 参见第159页。



我的博客 http://book-life.blog.163.com





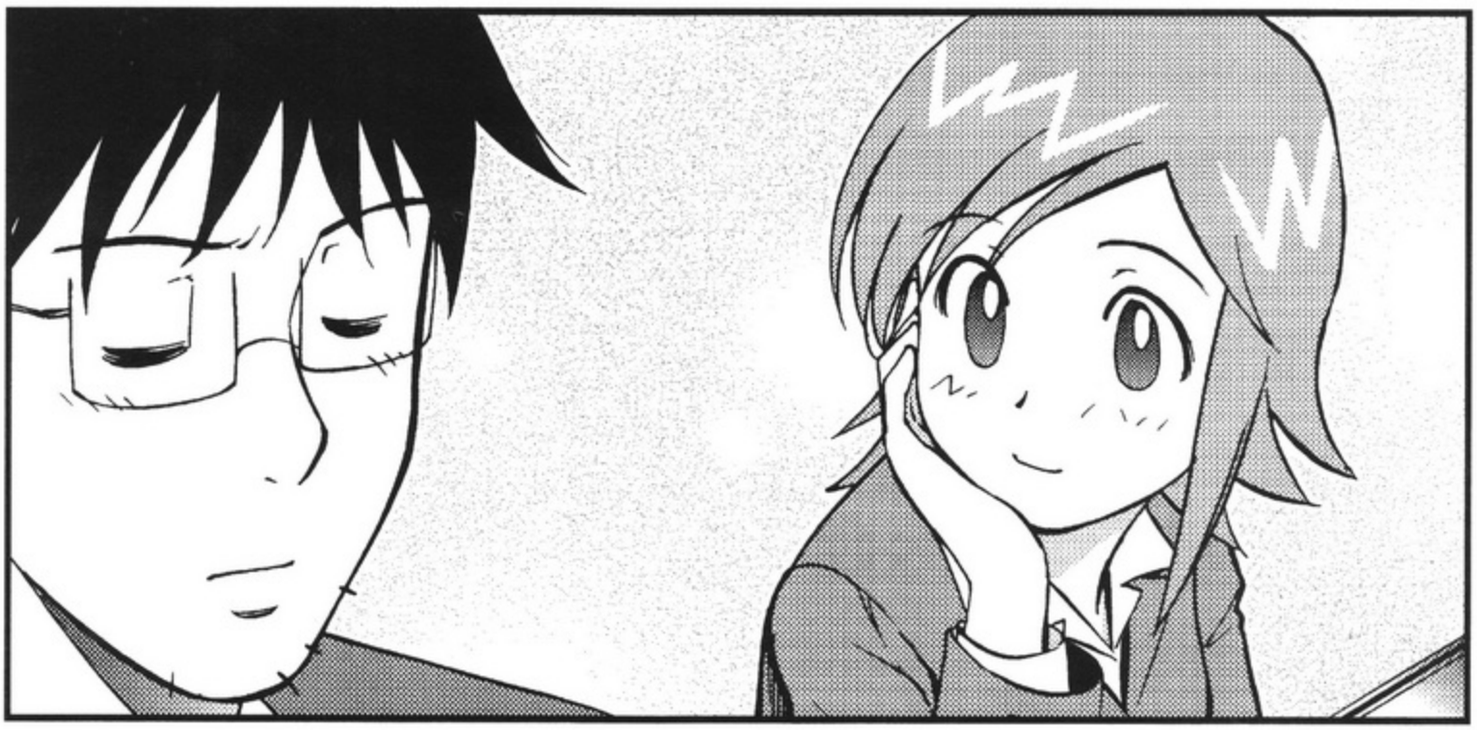

PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com





我的博客 http://book-life.blog.163.com






PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com

## 第5章 本章习题

**1.** 求 $f(x)=e^{-x}$ 在 $x=0$ 处的泰勒展开。

**2.** 求 $f(x)=\dfrac{1}{\cos x}$ 在 $x=0$ 处的近似二次函数。

**3.** 请自行推导一下漫画中出现的 $f(x)$ 在 $x=a$ 处的泰勒展开公式。

也就是求

$$f(x)=a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\cdots+a_n(x-a)^n+\cdots$$

时的 $a_n$。

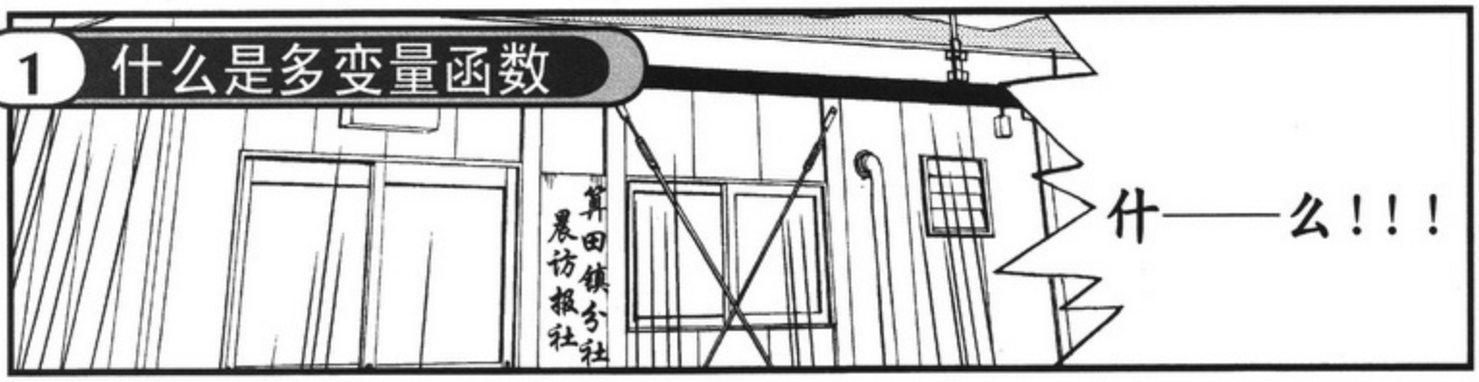

我的博客 http://book-life.blog.163.com

# 第6章

# 从多个因子中仅取其一即为偏微分



PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com










我的博客 http://book-life.blog.163.com

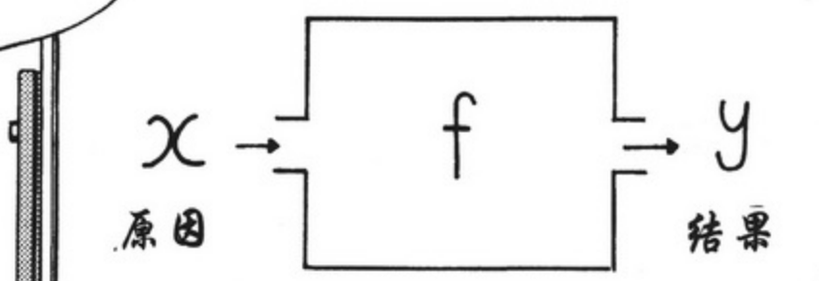
可是……
“一定是出于某种原因才会有这样的结果”……

这是记者每日必修的功课！是要时刻铭记的！

原因和结果……
哦，好怀念它们啊。记得当初是从它们开始学起的。

的确。到目前为止，我们所说的函数都是采用“一个原因、一个结果”这样的类型。

把它画成图，




……就是这样了。

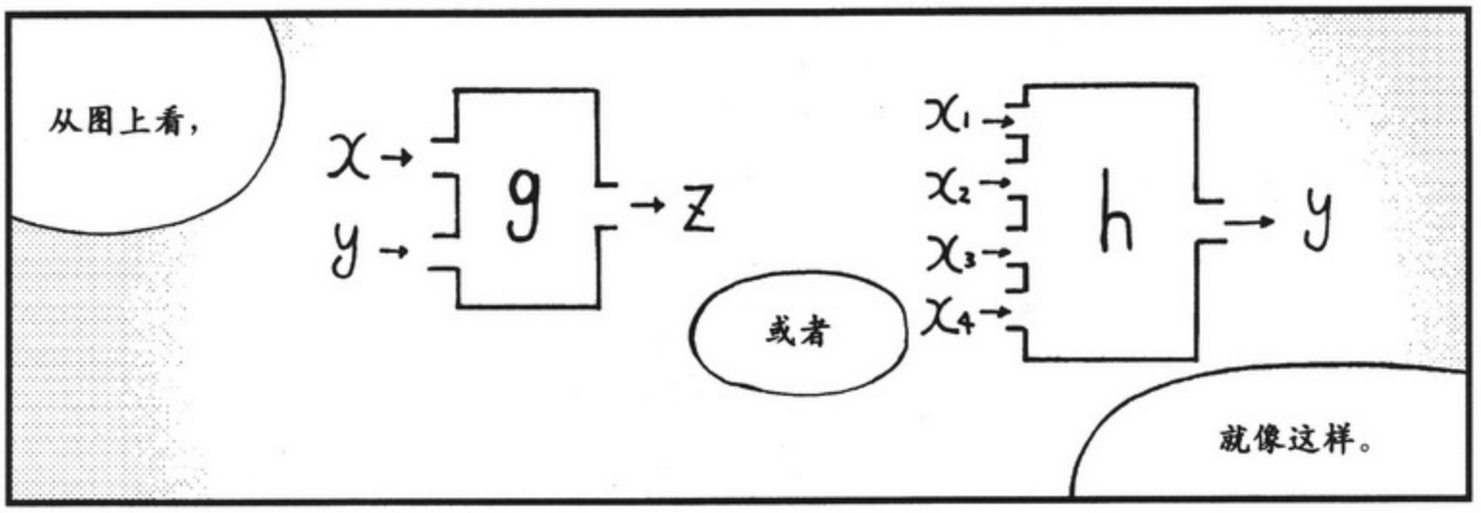
但是，世上的事物并不是如此简单的。我的此番调动，也让人琢磨不透。

呼……

啊？

这次大概是多个原因混在一起才会产生了总社调动这样的结果吧！

PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com














我的博客 http://book-life.blog.163.com




**例 1** 以速度 $v$，将物体从地面向上抛出，$t$ 秒后物体的高度为 $h(v,t)$。

于是，有 $h(v,t)=vt-4.9t^2$ (m)。

---

**例 2** $x$g 水中能够溶解 $y$g 糖，糖水的浓度为 $f(x,y)$。

此时，$f(x,y)=\dfrac{y}{x+y}\times 100\%$。

---

**例 3** 某国家拥有机械设备 (称为资本) 的量为 $K$，劳动力的量为 $L$ 时，能够生产的商品总量(GDP：国内生产总值) 就可以记为 $Y(L,K)$。



在经济学中，我们使用 $Y(L,K)=\beta L^{\alpha}K^{1-\alpha}$ ($\alpha,\beta$ 为常数)作为近似函数。
(称为：柯布-道格拉斯函数)
(参见第 201~203 页)

---

**例 4** 在物理学中，当理想气体的压力为 $P$，体积为 $V$ 时，其温度 $T$ 是一个关于 $P$ 和 $V$ 的函数。因此，我们可以将其写作 $T(P,V)$，于是，有

$$T(P,V)=\gamma PV \quad (\gamma \text{ 为常数})。$$

这个式子被称为“理想气体的状态方程”。

PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com

## 2 二元一次函数仍然是最基础的

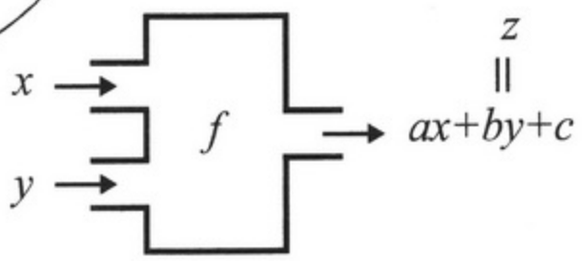
想一想，要如何来研究像例1~例4这样的复杂的二元函数的性质呢？

还是使用“近似一次函数”吗？

嗯

说的没错！可是现在是“二元函数”了，所以近似一次函数也一定是“二元”一次函数。

所谓二元一次函数就是形如 $z=f(x,y)=ax+by+c$ 的函数（$a,b,c$ 为常数）。




就是像
$z=3x+2y+1$ 或
$z=-x+9y-2$
这样的式子。

那么，思考一下要如何画出这些函数的图形呢？

输入的是两个变量（$x$ 和 $y$），输出的是一个变量（$z$），所以理所当然要使用“三维坐标系”。

嗯——

嗯——

嗯——
把 $x-y$ 平面想象成地面，$z$ 轴想象成柱子就可以了。

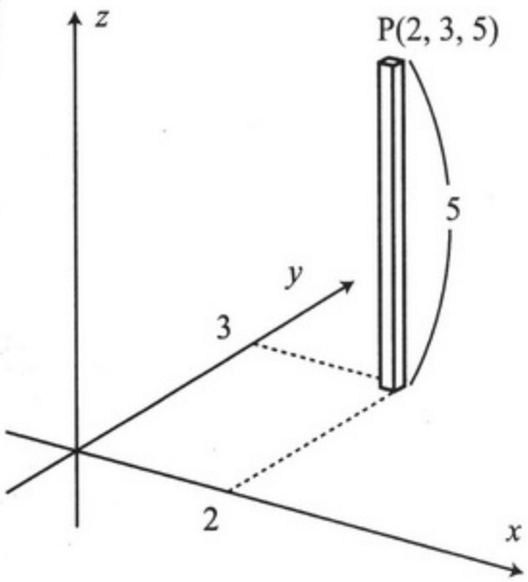
柱子……


我的博客 http://book-life.blog.163.com

为什么
要这么做？

嗯？
哎呀，咱们
再接着讲。

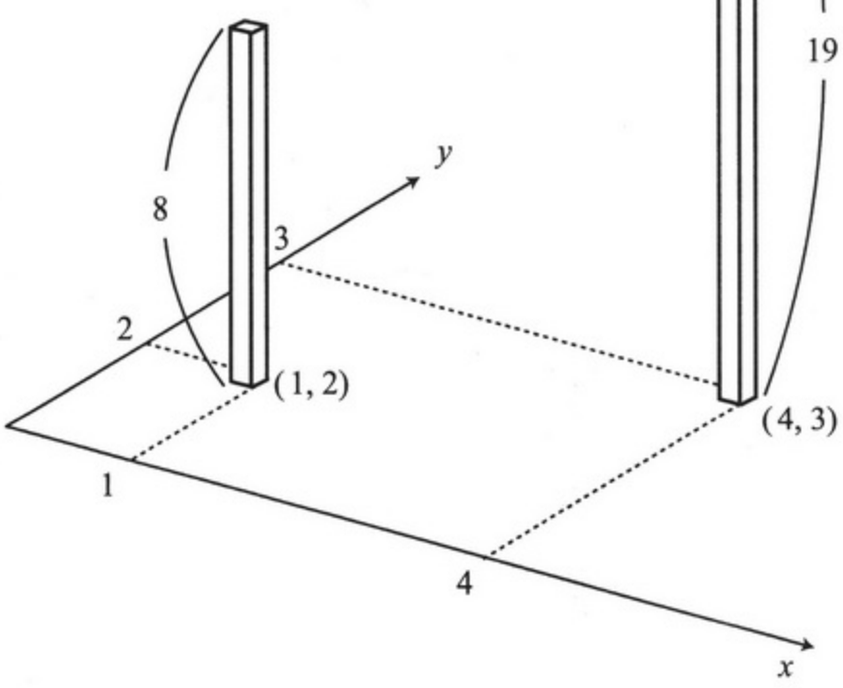
瞧！坐标为(2，3，5)的点P，
在图中就是在“地面”(2，3)
的地方所立起的高为5的木棒
的顶点。




那么，再考虑一下，在
三维坐标系中，要如何
画出二元一次函数
$z=f(x,y)$
$=ax+by+c$？

例如，你就
试着画一下
$z=f(x,y)$
$=3x+2y+1$
的图形吧。

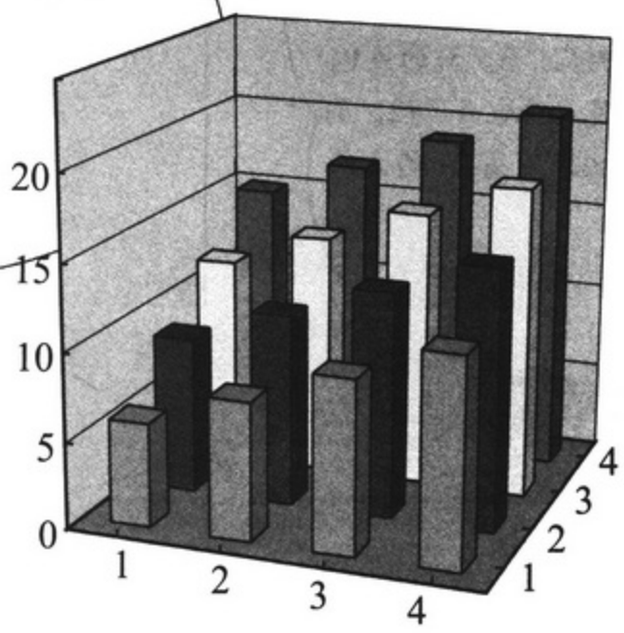
首先，在地面(1，2)的点上立起一个高为
$f(1，2)=3\times1+2\times2+1=8$的木棒。同样，
点(4，3)[1]处图形的高度就是$f(4，3)=3\times4+2\times3+1=19$。




1. 其实应该写作(4，3，0)，不过为了便于理解先写作(4，3)。

PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com

同样，在$1 \leqslant x \leqslant 4, 1 \leqslant y \leqslant 4$范围内的16个$(x,y)$点处都立起木棒，就是这个图。




一看到这个，就隐约觉得函数的图形是一个平面，对不对？



还真是这样。

首先，来考虑一下，最前排的柱子，是如何出现的吧。

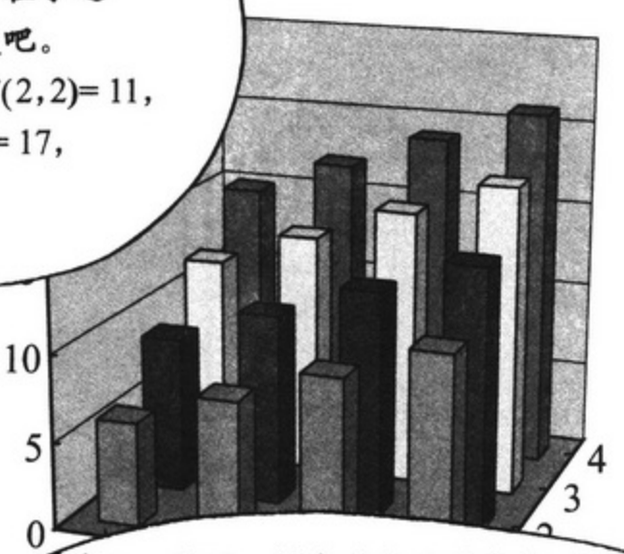


从左边起高度依次为
$f(1,1)=6$，$f(2,1)=9$，
$f(3,1)=12$，$f(4,1)=15$。

这是一条斜率为3的直线，只要将$y=1$代入，
$z=f(x,y)$
$=3x+2y+1$，
自然就会得到
$z=3x+2x+1$，
$=3x+3$。



然后，再看一下这些柱子之后邻近的柱子的高度吧。
高度为$f(1,2)=8$，$f(2,2)=11$，
$f(3,2)=14$，$f(4,2)=17$，
可以看出仅仅比前一排高出了2。



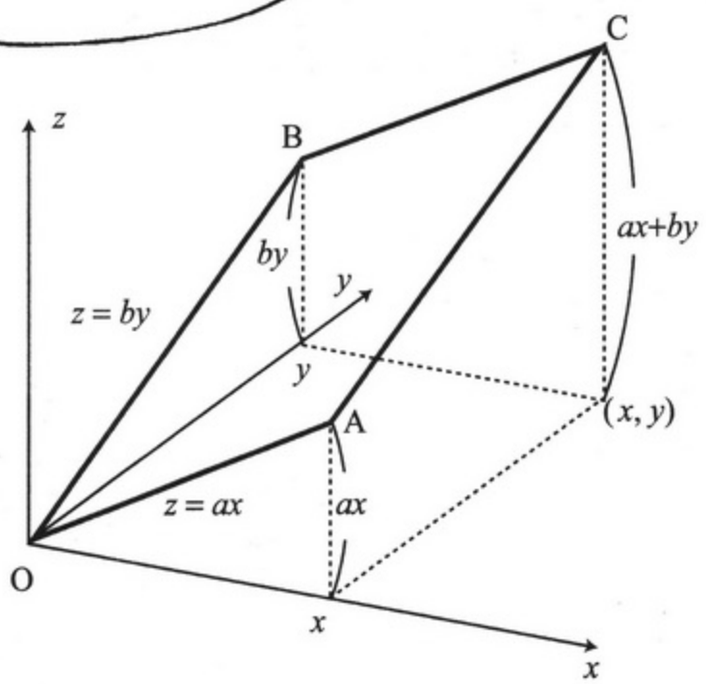

并且，再下一排中的柱子的高度
$f(1,3)=10$，$f(2,3)=13$，
$f(3,3)=16$，$f(4,3)=19$，
仍然比前一排中的柱子高出2。

我的博客 http://book-life.blog.163.com

总之，这些柱子从纵向看去，每一排都增高2个单位。

整体看来，就会明白，柱子的顶端可以画作平面。
把以上内容总结一下——

首先，画出
$z=f(x, y)=ax+by$
(设常数项$c$为0)。



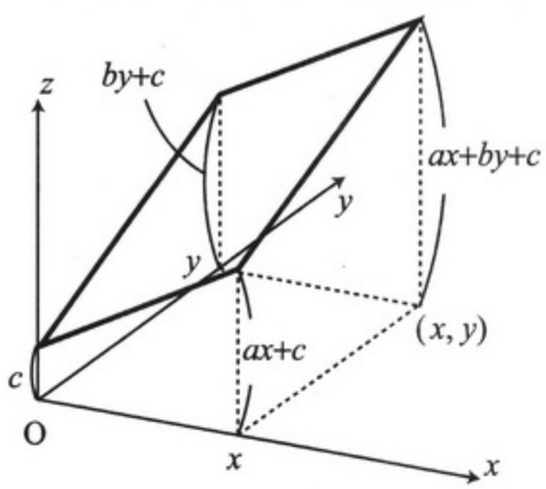

在$x$轴上方的$f(x, y)$的图形，就是将0代入$y$后，所得的$z=ax$。这是一条经过原点，斜率为$a$的直线OA。

在$y$轴上方的，$f(x, y)$的图形，就是代入$x$=0后，所得的$z=by$。这是一条经过原点，斜率为$b$的直线OB。

于是，$f(x, y)$的图形就会变成将OA和OB贴上布后绷紧了的帐篷(平面OACB)。

平行四边形OACB的点C就是图形在地面$(x, y)$处上方的点，高度恰为$z=ax+by$。

接下来，对于一般的
$z=g(x, y)=ax+by+c$
的图形，只需将目前的图形向上抬起$c$个单位就可以了。它就是一个经过原点上方$(0, 0, c)$的平面。




PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com





我的博客 http://book-life.blog.163.com
















PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com





我的博客 http://book-life.blog.163.com

## 3 二元函数的微分叫做偏微分

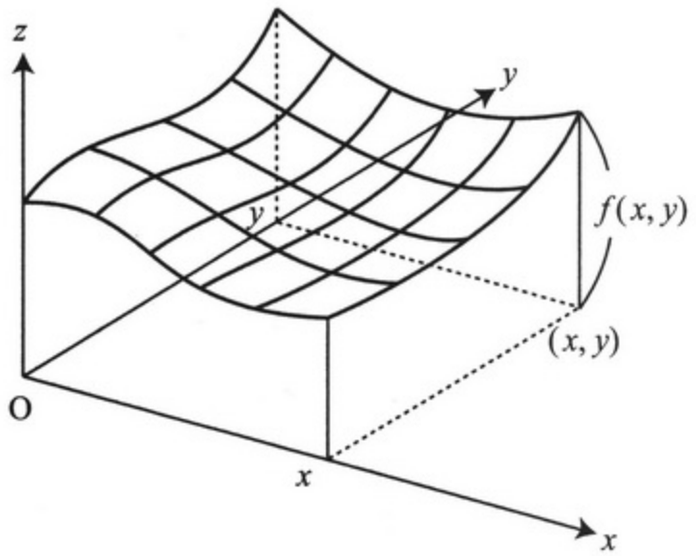
当当当……

第一节课我们讲二元函数的微分。

| 时间表 | |
|---|---|
| 1 | 偏微分 |
| 2 | |
| 3 | |

我们已经学过了二元一次函数，那么二元函数的微分仿照一元函数的微分进行就可以了。

二元函数的图形是一个“曲面”。




可以看做一个松弛的帐篷。

不对、不对，应该看成水果蛋糕。

呃，无论看成哪个都好，我们来做一下，在点$(a, b)$(也就是$x=a, y=b$)附近，$f(x, y)$的“近似二元一次函数”吧。

PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com

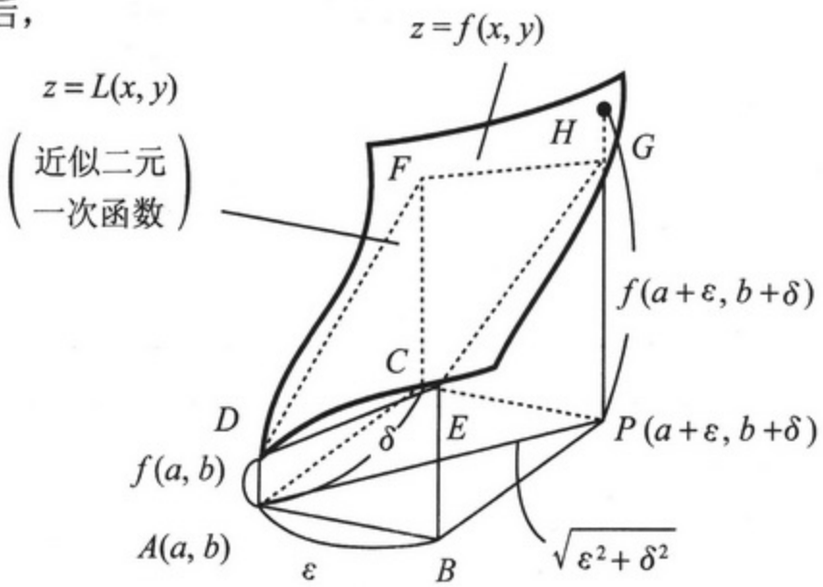
在点$(a,b)$处，作一个与$f(a,b)$高度一致的二元一次函数。将它记为

$$L(x,y)=p(x-a)+q(y-b)+f(a,b)。$$

将$a$代入$x$，将$b$代入$y$后，

就可以得到

$$L(a,b)=f(a,b)。$$




现在，$z=f(x,y)$的图形和$z=L(x,y)$的图形，都经过点A$(a,b)$上方同样的点，但是在点$A$以外的点$P(a+\varepsilon,b+\delta)$，两者的高度自然就有所差异了。这个误差为

$$f(a+\varepsilon,b+\delta)-L(a+\varepsilon,b+\delta)=f(a+\varepsilon,b+\delta)-f(a,b)-(p\varepsilon+q\delta)，$$

将它同$A$到P的距离$AP$做比，所得到的比值的多少，就是“误差率[1]”。

$$(\text{误差率})=\frac{(f\text{和}L\text{的差})}{AP\text{间的距离}}$$

$$=\frac{f(a+\varepsilon,b+\delta)-f(a,b)-(p\varepsilon+q\delta)}{\sqrt{\varepsilon^2+\delta^2}}\quad\text{——①}$$

其中，点$P$仅限于是存在于点$A$的附近的点，就是说只有同$f$的差值近似于0的函数$L(x,y)$，才能看作是“近似一次函数”。这样，我们只要求出$p$和$q$就可以了。$p$就是直线$DE$的斜率，$q$就是直线DF的斜率。

式中的$\varepsilon$和$\delta$为任意实数。那么，我们首先令$\delta=0$，来作一下分析吧。式①可以变为如下形式。

$$(\text{误差率})=\frac{f(a+\varepsilon,b+0)-f(a,b)-(p\varepsilon+q\times 0)}{\sqrt{\varepsilon^2+0^2}}$$

$$=\frac{f(a+\varepsilon,b)-f(a,b)}{\varepsilon}-p$$

1. 误差率：Error Ratio。


我的博客 http://book-life.blog.163.com

因此，当“$\varepsilon \to 0$”时，也就意味着“误差率$\to 0$”，也就是

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(a+\varepsilon, b)-f(a, b)}{\varepsilon}=p \qquad \text{——②}$$

所得结果就是DE的斜率。

此时，我们可以看出上式的左边与“一元函数微分”是一回事。也就是说，将$b$代入$f(x,y)$中的$y$，固定之后，得到的“只关于$x$”的函数$f(x,b)$。对于这个函数在$x=a$处求微分系数的计算，就如同式②的左边一样。

看到左边进行的运算是微分，就不假思索地要写作$f'(a,b)$，可是，如此一来，我们也不知道$f$是关于$x$和$y$中的哪一个进行的微分。

所以，将“把$y$固定在$b$后，在$x=a$处求得的$f$的微分系数”记为$f_x(a,b)$。这个$f_x$被称为“$f$在$x$方向的偏微分系数”。它替代了一元函数微分中的“撇号”。

同$\frac{df}{dx}$这种书写方法相对应的符号，我们使用$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$。

总结一下，我们得到如下结论。

“把$y$固定在$b$后，在$x=a$处求$x$方向的偏微分系数”

$$f_x(a, b)=\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)\left(\text{也可写作}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{x=a, y=b}\right)$$

$=DE$的斜率




完全相同的道理，我们也可以得到一下结论。

“把$x$固定在$a$后，在$y=b$处求$y$方向的偏微分系数”

$$f_y(a, b)=\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\left(\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]_{x=a, y=b}\right)$$

$=DF$的斜率

PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com

通过以上讲解，我们可以得出以下结论。

只要$z=f(x,y)$在$(x,y)=(a,b)$的附近存在近似一次函数，它就可以写成如下形式。

$$z=f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)+f(a,b) \quad \text{——③}$$

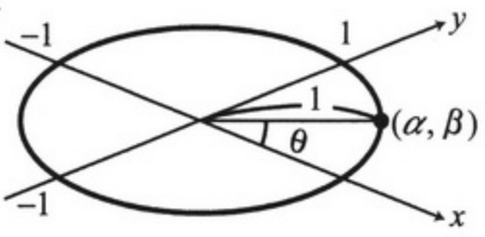
$$\left(\text{或写作 } z=\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a)+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)+f(a,b)\right)^{\text{※注1}}$$

※注1

当AP→0时，在$x$方向和$y$方向上，可以求出近似一次函数的误差率为0。但是，对于这样求出的系数$f_x(a,b)$和$f_y(a,b)$而构造的函数，当AP→0时，是否在“任意方向上”都有误差率→0，我们仍不清楚。尽管不是很严谨，我们还是再尽力求证一下。

在$x$–$y$平面(地面)上，以原点为中心，以1为半径的圆上有一点$(\alpha,\beta)$。于是有$\alpha^2+\beta^2=1$(也可以写作$\alpha=\cos\theta$、$\beta=\sin\theta$)。

求一下点(0，0)到点$(\alpha,\beta)$方向上的微分系数。在这个方向上，移动长度$t$后就有$(a,b)\to(a+\alpha t,b+\beta t)$。只要设式①中的$\varepsilon=\alpha t$、$\delta=\beta t$，就有




$$(\text{误差率})=\frac{f(a+\alpha t,b+\beta t)-f(a,b)-(p\alpha t+q\beta t)}{\sqrt{\alpha^2t^2+\beta^2t^2}}$$

$$=\frac{f(a+\alpha t,b+\beta t)-f(a,b)}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,t}-p\alpha-q\beta$$

$$=\frac{f(a+\alpha t,b+\beta t)-f(a,b)}{t}-p\alpha-q\beta \quad \text{——④（由于}\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=1\text{）}$$

在此，令$p=f_x(a,b)$，$q=f_y(a,b)$，就可以将上式作如下变形。

$$④=\frac{f(a+\alpha t,b+\beta t)-f(a,b+\beta t)}{t}+\frac{f(a,b+\beta t)-f(a,b)}{t}$$

$$-f_x(a,b)\alpha-f_y(a,b)\beta \quad \text{——⑤}$$



同时，只关于$x$的函数$f(x,b+\beta t)$中，在$x=a$处的微分为

$f_x(a,b+\beta t)$，

所以，由“一元函数的近似一次函数”可得

$f(a+\alpha t,b+\beta t)-f(a,b+\beta t)\sim f_x(a,b+\beta t)\,\alpha t$。

同理，对于$y$来说有


我的博客 http://book-life.blog.163.com

$f(a, b+\beta t)-f(a, b) \sim f_y(a, b)\beta t$

将它们代入⑤可得，

⑤$\sim f_x(a, b+\beta t)\alpha + f_y(a, b)\beta - f_x(a, b)\alpha - f_y(a, b)\beta$

$=(f_x(a, b+\beta t)-f_x(a, b))\alpha$

只要 $t$ 非常接近 0 的话，就会有 $f_x(a,b+\beta t) - f_x(a,b) \sim 0$，

误差率=⑤$\sim$0，所以，这就表示“无论在哪个方向上，当AP$\to$0 时，都有误差率$\to$0”。

此外，对于 $f_x(a,b+\beta t) - f_x(a,b) \sim 0 (t \sim 0)$ 而言，$f_x$ 的“连续性”是十分必要的。如果没有连续性，$f_x$ 和 $f_y$ 也就不存在，也就不知道所有方向上的微分系数是否都存在。不过，这类函数属于特殊函数，在本书中不作介绍。

[计算实例]

求例 1 中的函数 $h(v,t)=vt-4.9t^2$，在 $(v,t)=(100,5)$ 处的偏微分系数。

在 $v$ 方向，对 $h(v,5)=5v-122.5$ 进行微分，则

$$\frac{\partial h}{\partial v}(v, 5)=5，\text{所以}$$

$$\frac{\partial h}{\partial v}(100, 5)=h_v(100, 5)=5$$



在 $t$ 方向，对

$h(100,t)=100t-4.9t^2$ 进行微分，则

$$\frac{\partial h}{\partial t}(100, t)=100-9.8t$$

所以，$\dfrac{\partial h}{\partial t}(100, 5)=h_t(100, 5)=100-9.8\times 5=51$

近似一次函数为 $L(x,y)=5(v-100)+51(t-5)-377.5$

一般地，$\dfrac{\partial h}{\partial v}=t$，$\dfrac{\partial h}{\partial t}=v-9.8t$

因此，对于在 $(v_0,t_0)$ 附近的 $(v,t)$，有

$$h(v,t) \underset{\text{近似}}{\sim} t_0(v-v_0)+(v_0-9.8t_0)(t-t_0)+h(v_0,t_0)$$

再接着做一下例 2 吧。

PDF电子书基地 http://dayo1982.400gb.com

$$f(x,y)=\frac{100y}{x+y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=f_x=-\frac{100y}{(x+y)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=f_y=\frac{100(x+y)-100y\times 1}{(x+y)^2}=\frac{100x}{(x+y)^2}$$

因此，对于在$(a,b)$附近的$(x,y)$，有

$$f(x,y)\underset{\text{近似}}{\sim}-\frac{100b}{(a+b)^2}(x-a)+\frac{100a}{(a+b)^2}(y-b)+\frac{100b}{a+b}$$

## 偏微分的定义

函数$z=f(x,y)$，在某个邻域内的所有点$(x, y)$都可以关于 $x$ 进行偏微分时，在点$(x, y)$处，关于$x$的偏微分系数$f_x(x,y)$所对应的函数

$$(x,y)\to f_x(x,y)$$

被称为$z=f(x,y)$关于**$x$的偏导数**[1]。

可以用以下方式表示，

$$f_x, f_x(x,y), \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial x} \text{ 等。}$$

同样地，在这个邻域内的所有点$(x,y)$都可以关于$y$进行偏微分时，所对应的

$$(x,y)\to f_y(x,y)$$

被称为$z=f(x,y)$关于**$y$的偏导数**。

可以用以下方式表示，

$$f_y, f_y(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial y} \text{ 等。}$$

求偏导数的过程叫做**偏微分**。

1. 偏导数：Partial Derivatives。




由 $z=f(x,y)$ 在 $(x,y)=(a,b)$ 处的近似一次函数可知

$f(x,y)\underset{\text{近似}}{\sim} f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(x-b)+f(a,b)$。

可以将它改写为：

$$f(x,y)-f(a,b)\underset{\text{近似}}{\sim}\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a)+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b) \qquad \text{——⑥}$$

$f(x,y)-f(a,b)$ 就意味着，当点由 $(a,b)$ 向 $(x,y)$ 变化时，高度 $z(=f(x,y))$ 的增量，效仿一元函数的情况写作 $\Delta z$。另外，$x-a$ 为 $\Delta x$，$y-b$ 为 $\Delta y$。

此时，式⑥可以写作

$$\Delta z\underset{\text{近似}}{\sim}\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y \qquad \text{——⑦}$$

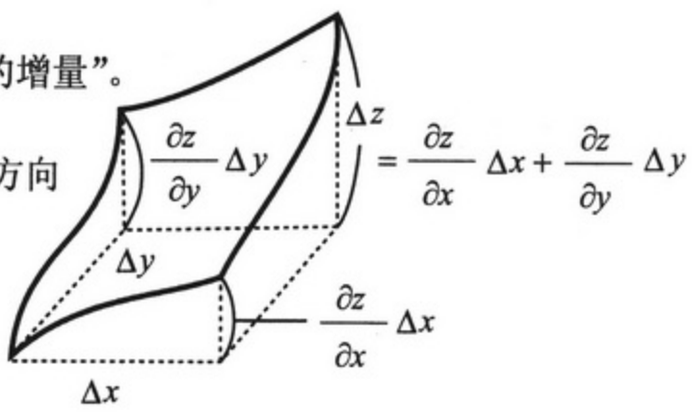
$(x\underset{\text{近似}}{\sim}a,\ y\underset{\text{近似}}{\sim}b)$ 时，这个式子意味着：

“对于函数 $z=f(x,y)$，当 $x$ 由 $a$ 增加了 $\Delta x$、$y$ 由 $b$ 增加了 $\Delta y$ 后，$z$ 就相应增加了 $\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$”。

$\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x$ 表示“$y$ 固定在 $b$ 时 $x$ 方向上的增量”，

$\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$ 表示“$x$ 固定在 $a$ 时 $y$ 方向上的增量”。

说明“$z(=f(x,y))$ 的增量可以分解为 $x$ 方向上的增量与 $y$ 方向上的增量之和”。



将这个式⑦作理想化(瞬时化)处理，得

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy \qquad \text{——⑧}$$

或者

$$df=f_x dx+f_y dy \qquad \text{——⑨}$$

(Δ换作d)



⑧或⑨被称为“全微分[1]公式”。

这一过程用语言描述就是

(曲面高度的增量)=($x$方向上的微分系数)×($x$方向上的增量)

+($y$方向上的微分系数)×($y$方向上的增量)。

试着求一下“例 4”中的全微分式吧。

进行适当的单位变换后，状态方程就可以写作 $T=PV$。

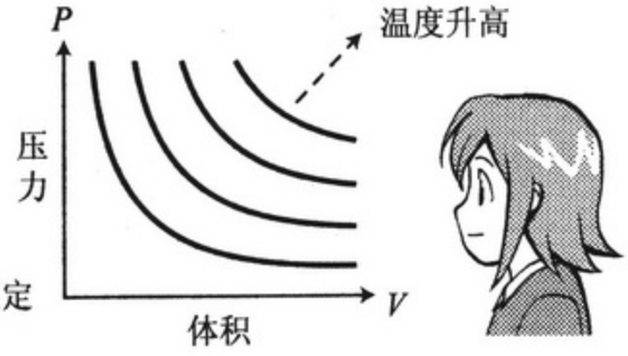
$$\frac{\partial T}{\partial P}=\frac{\partial (PV)}{\partial P}=V,\ \frac{\partial T}{\partial V}=\frac{\partial (PV)}{\partial V}=P$$

因此，全微分式写作 $dT=VdP+PdV$。

若写回成近似公式就是 $\Delta T \underset{\text{近似}}{\sim} V\Delta P+P\Delta V$。

这就意味着理想气体的温度的增量，可以通过“体积×(压力的增量)+压力×(体积的增量)”来进行计算。

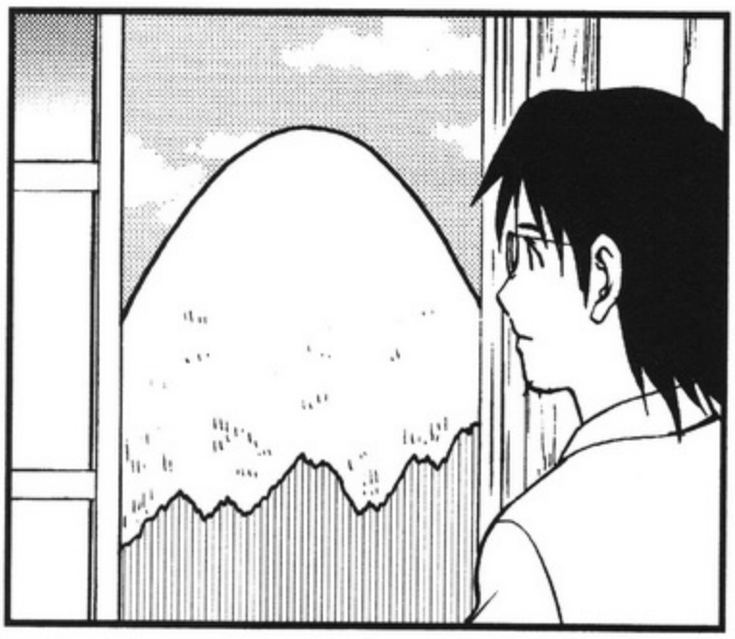




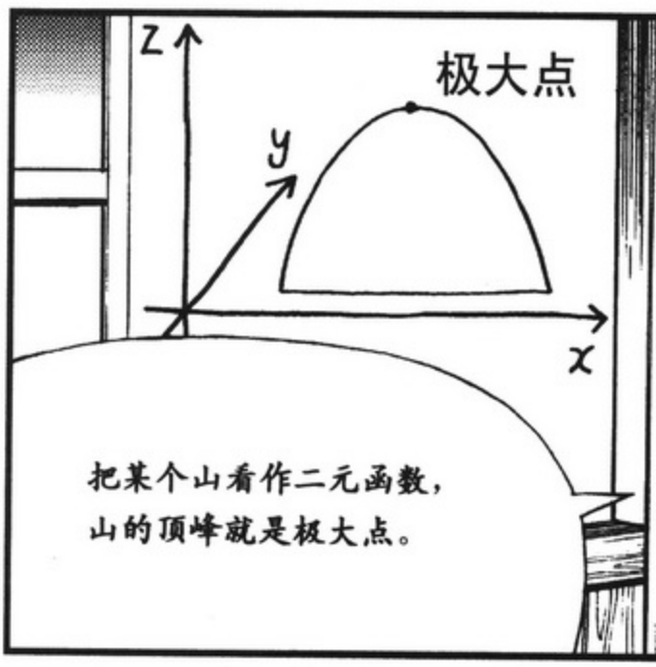

1. 全微分：Total Differetial。

# 5 对极值条件的应用


第三节课

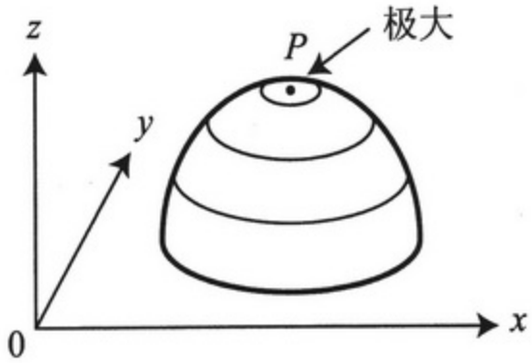


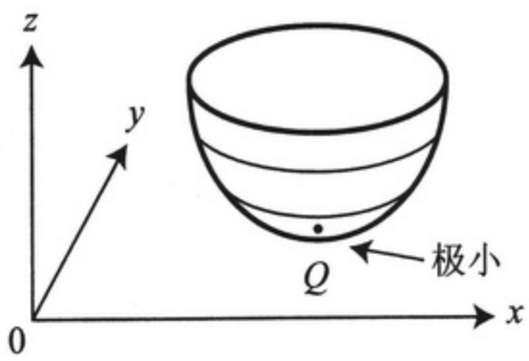

真好啊，
算田镇……
同以前比，
没怎么变样。
！

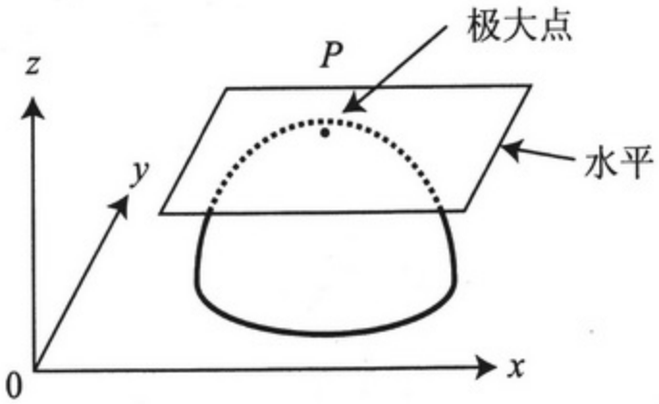

Z
极大点
y
x
把某个山看作二元函数，
山的顶峰就是极大点。


啊！
又开始讲课了……
无力

对于二次函数 $f(x,y)$ 来说，所谓极值，就如同是图形处于山的顶峰或谷底时。




此时，在 P 点或 Q 点处所接触的平面是一个与平面 $x$–$y$ 平行的平面，则对于近似一次函数 $f(x,y)\underset{\text{近似}}{\sim}p(x-a)+q(y-b)+f(a,b)$ 来说，应该有 $p=q=0$。

由于，其中 $p=\dfrac{\partial f}{\partial x}(=f_x)$，$q=\dfrac{\partial f}{\partial y}(=f_y)$，所以极值条件[※注1]为：

若函数 $f(x,y)$ 在 $(x,y)=(a,b)$ 处取极值，则有

$$f_x(a,b)=f_y(a,b)=0,$$

或者

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0。$$

※注 1　这个条件反过来是不成立的。也就是说，由 $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$，并不能说明在 $(x,y)=(a,b)$ 处 $f$ 取得极值。所以说，满足这个条件的只不过是“极值的候选人”。



在二元函数的极值点处，在 $x$ 和 $y$ 两个方向上的偏微分系数都是 0。

例 试求出 $f(x,y)=(x-y)^2+(y-2)^2$ 的极小值。先来说一下以往的解答。

$(x-y)^2 \geqq 0$，$(y-2)^2 \geqq 0$, 所以

$$f(x,y)=(x-y)^2+(y-2)^2 \geqq 0。$$

将$x=y=2$代入上式，得

$$f(2,2)=(2-2)^2+(2-2)^2=0,$$

由此可知，对于任意的$(x,y)$都有 $f(x,y) \geqq f(2,2)$。也就是说，当 $(x,y)=(2,2)$ 时，$f(x,y)$ 取极小值 0。

同时，$\dfrac{\partial f}{\partial x}=2(x-y)$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=2(x-y)(-1)+2(y-2)=-2x+4y-4,$$

由于 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$，所以可以得出

$$\begin{cases} 2x-2y=0 \\ -2x+4y-4=0 \end{cases}$$

解这个联立后的方程组，的确可以得出 $(x,y)=(2,2)$。

恰好一致耶！



## 6 将偏微分用于经济学

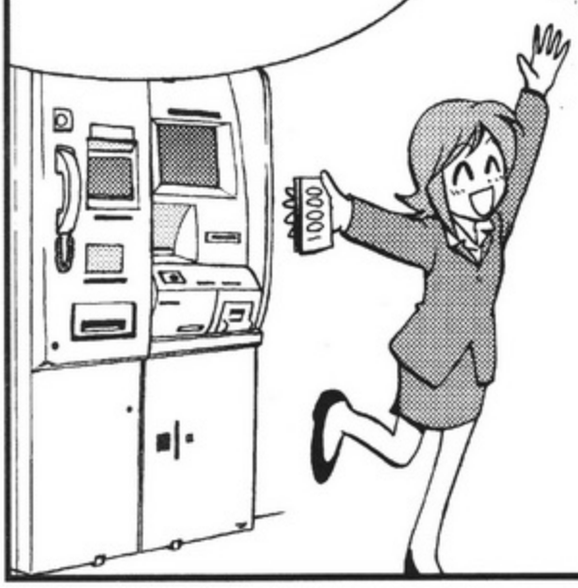
在美国伊利诺伊州所选举出的上院议员中，有一位名叫保罗•道格拉斯的人，他于1949年至1966年担任议员。

实际上，此人原本是名经济学家。在1927年就已经在思考按照资本和劳动分配国民收入的问题。

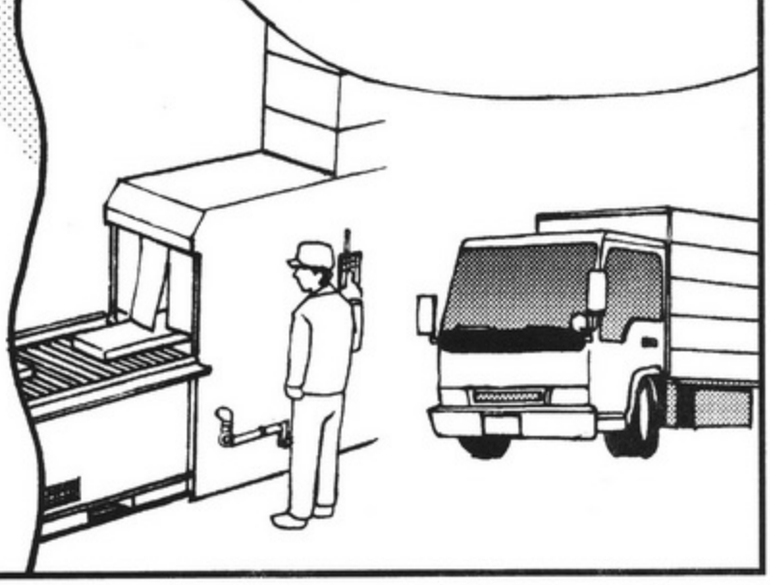
那究竟要如何分配呢？

国民生产总值(GDP)表示一年之中，国内所生产产品的量，将它分配给国民的途径大致可分为两种。

第1种途径是作为劳动的薪金支付给国民。



第2种途径是作为资本分红支付给机械设备等资本的所有者。



根据道格拉斯
对美国的调查，
这一分配比率
在大约40年间
大体是一定的。

国民生产总值中大约
有七成作为劳动的薪
金，三成作为给资本
所有者的分红。

嗯！如此稳定的分配比率，还真是件怪事。要知道经济形势每时每刻都在变化啊。

所以就很想知道
产生如此结果的
生产函数$f(L, K)$
是怎样的函数？

苦恼的道格拉斯又向数学家查尔斯•柯布提出疑问。

于是，就发现了那个很有名的
“柯布-道格拉斯”函数。

柯布-道格拉斯型函数

$$f(L,K)=\beta L^{\alpha}K^{1-\alpha}$$

那……能请您
再稍微详细地
给我讲讲有关
我工资的事情吗？

那我们就去
证明一下吧，
之前讲的都可以应用。

首先，设每 1 个单位的劳动量所对应的薪金为 $w$，为每 1 个单位的资本所对应的资本分红为 $r$。现在，把国家当作一个企业来考虑，如果生产函数是 $f(L,K)$ 的话，利润 $\Pi$ 就是

$$\Pi = f(L,K) - wL - rK。$$

企业会选择能够使这个利润达到最大的劳动力 $L$ 和资本量 $K$，由极值条件可知有下式成立，

$$\frac{\partial \Pi}{\partial L} = \frac{\partial \Pi}{\partial K} = 0。$$

$$0 = \frac{\partial \Pi}{\partial L} = \frac{\partial f}{\partial L} - \frac{\partial (wL)}{\partial L} - \frac{\partial (rK)}{\partial L} = \frac{\partial f}{\partial L} - w \iff w = \frac{\partial f}{\partial L} \quad \text{——①}$$

$$0 = \frac{\partial \Pi}{\partial K} = \frac{\partial f}{\partial K} - \frac{\partial (wL)}{\partial K} - \frac{\partial (rK)}{\partial K} = \frac{\partial f}{\partial K} - r \iff r = \frac{\partial f}{\partial K} \quad \text{——②}$$

也就是说，

(报酬)=(生产函数关于 $L$ 的偏微分)

(给资本的分红)=(生产函数关于 $K$ 的偏微分)

此外，国民通过劳动所获得的报酬为(薪金)×(劳动量)=$wL$。它占所生产产品的七成，即

$$wL = 0.7f(L,K) \quad \text{——③}$$

同样地，对于资本所用者所获得的报酬来说，也应该是

$$rK = 0.3f(L,K) \quad \text{——④}$$

由①和③可知，

$$\frac{\partial f}{\partial L} \times L = 0.7f(L,K) \quad \text{——⑤}$$

由②和④可知，

$$\frac{\partial f}{\partial K} \times K = 0.3f(L,K) \quad \text{——⑥}$$



数学家柯布解出了它们成立的$f(L,K)$。柯布所找到的函数就是

$$f(L,K)=\beta L^{0.7}K^{0.3}$$

($\beta$是一个正的参数，它表示技术水平)

是否真的是这样呢？我们来验证一下吧！

$$\frac{\partial f}{\partial L}\times L=\frac{\partial(\beta L^{0.7}K^{0.3})}{\partial L}\times L=0.7\beta L^{(-0.3)}K^{0.3}\times L^{1}$$

$$=0.7\beta L^{0.7}K^{0.3}$$

$$=0.7f(L,K)$$

$$\frac{\partial f}{\partial K}\times K=\frac{\partial(\beta L^{0.7}K^{0.3})}{\partial K}\times K=0.3\beta L^{0.7}K^{(-0.7)}\times K^{1}$$

$$=0.3\beta L^{0.7}K^{0.3}$$

$$=0.3f(L,K)$$








## 7 对多元复合函数求偏微分的公式——锁链法则[1]

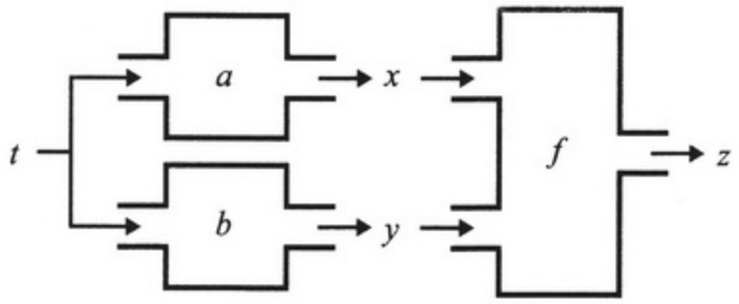
我们之前已经学过一元复合函数(见第 14 页)。

$$y=f(x), z=g(y), z=g(f(x)), (g(f(x)))' = g'(f(x))f'(x)$$



在此，我们先来讲一下多元函数的复合函数的偏微分公式(锁链法则)。

$z$ 是一个关于 $x$ 和 $y$ 的二元函数，记为 $z=(x,y)$，$x$ 和 $y$ 分别是 $t$ 的一元函数，分别用 $x=a(t)$、$y=b(t)$ 表示。此时，$z$ 如下图所示，能够表示为只关于 $t$ 的函数。




写成式子的话，就是

$$z=f(x,y)=f(a(t),b(t))$$

此时，$\dfrac{dz}{dt}$ 会是什么样的呢？

当 $t=t_0$ 时，有 $a(t_0)=x_0, b(t_0)=y_0, f(x_0,y_0)=f(a(t_0),b(t_0))=z_0$，同之前一样，我们只考虑离 $t_0, x_0, y_0, z_0$ 非常近的区域。

$$z-z_0 \underset{\text{近似}}{\sim} a \times (t-t_0) \qquad \text{——①}$$

只要求出上式中的 $a$，它就是 $\dfrac{dz}{dt}(t_0)$ 的值。

首先，对函数 $x=a(t)$ 进行微分，得

$$x-x_0 \underset{\text{近似}}{\sim} \frac{da}{dt}(t_0)(t-t_0) \qquad \text{——②}$$

1. 锁链法则：Chain Rule。

同样地，对 $y=b(t)$ 进行微分，得

$$y-y_0 \underset{\text{近似}}{\sim} \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t}(t_0)(t-t_0) \qquad \text{——③}$$

接下来，由二元函数 $f(x,y)$ 的全微分公式，可知

$$z-z_0 \underset{\text{近似}}{\sim} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) \qquad \text{——④}$$

将②和③代入④，得

$$z-z_0 \underset{\text{近似}}{\sim} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}(t_0)(t-t_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t}(t_0)(t-t_0)$$

$$=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}(t_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t}(t_0)\right)(t-t_0) \qquad \text{——⑤}$$

将①和⑤进行比较，得

$$\alpha=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}(t_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t}(t_0),$$

就得到我们想要的了，于是就能够得出接下来的公式。

**公式 6-1 | 锁链法则公式(Chain rule)**

当 $z=f(x,y)$，$x=a(t)$，$y=b(t)$ 时，

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t}$$




1. 外部性：Externality。
2. 外部不经济：External Diseconomics。

将捕鱼量看作是劳动力数量 $y$ 和污染物 $b$ 的二元函数，将其设为 $g(y,b)$ (其中，随着 $b$ 的增加，捕鱼量 $g(y,b)$ 会有所减少，就是说，$\frac{\partial g}{\partial b}$ 是负值)。

$g(y,b)$ 又可以写成 $g(y,b(f(x)))$，它包含变量 $x$，然而工厂的生产并不是通过市场而对渔业造成的影响。可以看出，这就是外部性。

首先，在工厂和渔业都只考虑其自身利益(利己行为)的情况下，会得出怎样的结论呢？设工厂和渔业的薪金都为 $w$，工厂商品的价格为 $p$，鱼的价格为 $q$。则工厂的利润 $\prod_1$ 就是

$$\prod_1(x) = pf(x) - wx \qquad \text{—— ①}$$

因此，工厂是要将这一利润达到最大。极值条件为

$$\frac{d\prod_1}{dx} = pf'(x) - w = 0 \Leftrightarrow pf'(x) = w \qquad \text{—— ②}$$

我们将满足这一条件的 $x$ 记为 $x^*$。也就是

$$pf'(x^*) = w \qquad \text{—— ③}$$

这个 $x^*$ 是工厂所雇用的劳动力的数量，则商品的产量为 $f(x^*)$，废弃物的量为

$$b^* = b(f(x^*))$$

接下来，渔业的利润 $\prod_2$ 为

$$\prod_2 = qg(y,b) - wy$$

然而，其中的工厂所排出的废弃物的量已由 $b^* = b(f(x^*))$ 事先决定，所以

$$\prod_2 = qg(y,b^*) - wy \qquad \text{—— ④}$$

实际上是一个关于 $y$ 的一元函数。为了使 $\prod_2$ 达到最大，只需对 $y$ 使用二元函数的极值条件即可。

$$\frac{\partial \prod_2}{\partial y} = q\frac{\partial g}{\partial y}(y, b^*) - w = 0 \Leftrightarrow q\frac{\partial g}{\partial y}(y, b^*) = w \qquad \text{—— ⑤}$$

因此，所投入的最佳劳动力数量 $y^*$ 满足下式：

$$q\frac{\partial g}{\partial y}(y^*, b^*) = w \qquad \text{—— ⑥}$$



将上述内容总结一下……

在这个模型中，工厂和渔业都进行自由经济活动，此时两者的生产量是由满足：

$$pf'(x^*)=w \qquad \text{—— ③}$$

$$b^*=b(f(x^*)),\ q\frac{\partial g}{\partial y}(y^*,b^*)=w \qquad \text{—— ⑥}$$

的 $x^*$、$y^*$进一步得出的，工厂所生产的商品的量为$f(x^*)$，捕鱼量为 $g(y^*,b^*)$。



那么，关社长。对于“全社会”来说，怎样做才是最好的呢？

如果我们只关注工厂和渔业这两个行业的话，就应该使两者的利益之和(如下式)达到最大。

$$\Pi_3=pf(x)+qg(y,b(f(x)))-wx-wy$$

$\Pi_3$是一个关于 $x$ 和 $y$ 的二元函数，所以它的极值条件为

$$\frac{\partial\Pi_3}{\partial x}=\frac{\partial\Pi_3}{\partial y}=0。$$

第 1 偏微分为：

$$\frac{\partial\Pi_3}{\partial x}=pf'(x)+q\ \frac{\partial g(y,b(f(x)))}{\partial x}-w$$

$$=pf'(x)+q\ \frac{\partial g}{\partial b}\ (y,b(f(x)))\,b'\ (f(x))f'(x)-w$$

(这里我们使用了锁链法则)

所以，

$$\frac{\partial\Pi_3}{\partial x}=0\Leftrightarrow\left(p+q\frac{\partial g}{\partial b}\ (y,b(f(x)))\,b'\ (f(x))\right)f'(x)=w \qquad \text{—— ⑦}$$

同样，有

$$\frac{\partial \Pi_3}{\partial y}=0 \Leftrightarrow q\frac{\partial g}{\partial y}(y, b(f(x)))=w \quad \text{——⑧}$$

所以，此时的最佳劳动力投入量工厂为 $x^{**}$，渔业为 $y^{**}$的话，就会满足下面的式子：

$$\left(p+q\frac{\partial g}{\partial b}(y^{**}, b(f(x^{**}))\ b'(f(x^{**}))\right) f'(x^{**})=w \quad \text{——⑨}$$

$$q\frac{\partial g}{\partial y}(y^{**}, b(f(x^{**})))=w \quad \text{——⑩}$$

虽然形式很复杂，但说到底也不过是联立之后二元方程组的解而已。

同刚刚“利己行为”的方程式③⑥相比，可以看出⑥和⑩相同，但③和⑨是不同的。那么究竟有什么不同呢？

$$p\times f'(x^{*})=w \quad \text{——③}$$

↓

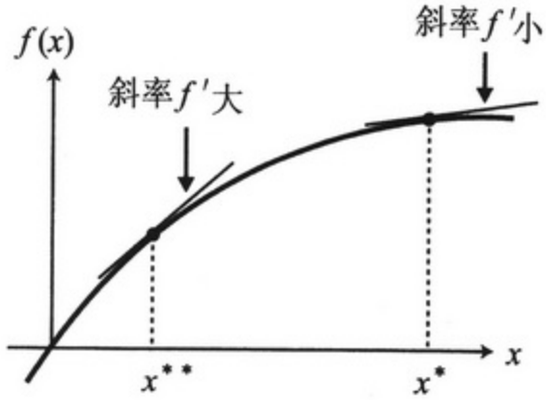
$$(p+\heartsuit)\times f'(x^{**})=w \quad \text{——⑪}$$

其中多出了♥的部分。

由于$\left(\heartsuit=q\frac{\partial g}{\partial b}b'(f(x^{**}))\right)$为负值，所以 $p+\heartsuit$比 $p$ 小

↑ 为负值

于是，相乘以后同样也是等于 $w$，如此一来，$f'(x^{**})$一定比$f'(x^{*})$大。




上述中的$f(x)$

通常都是这样的……



本来，在表示利己行为的需求曲线和供给曲线的交点处，社会利益便已达到最大。

但是，如这个例子一样，存在公害等外部不经济时情况就不再是那样了。

为了全社会的利益，工厂劳动力的量应当由只顾自己利益时的$x^*$减少到$x^{**}$。

请参见105页

但是，有什么好办法能使工厂主动地将生产由$x^*$减少到$x^{**}$吗？

通过国家命令来使之减少的话，那是计划经济。

除此以外的好办法就是征收税金了。

税金

在工厂生产时，征收一定比例的税金。

我们称其为环境税。

税

税

工厂

对于全球变暖问题，也有人主张针对二氧化碳的排放征收碳税。

碳

碳

税

工厂

于是只顾自己利益时的利润①就变成如下形式。

$$\Pi_1(x)=pf(x)-wx-(-\heartsuit f(x)) \quad \text{—⑫}$$

将其最大化的极值条件为

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial x}=pf'(x)-w+\heartsuit f'(x)=0\Leftrightarrow(p+\heartsuit)f'(x)=w \quad \text{—⑬}$$

由于⑬和⑨两个方程式相同，所以此时工厂的产量也会使社会利益达到最大。

对于目前的情况，对每1单位工厂的商品征收$(-\heartsuit)$的税金。

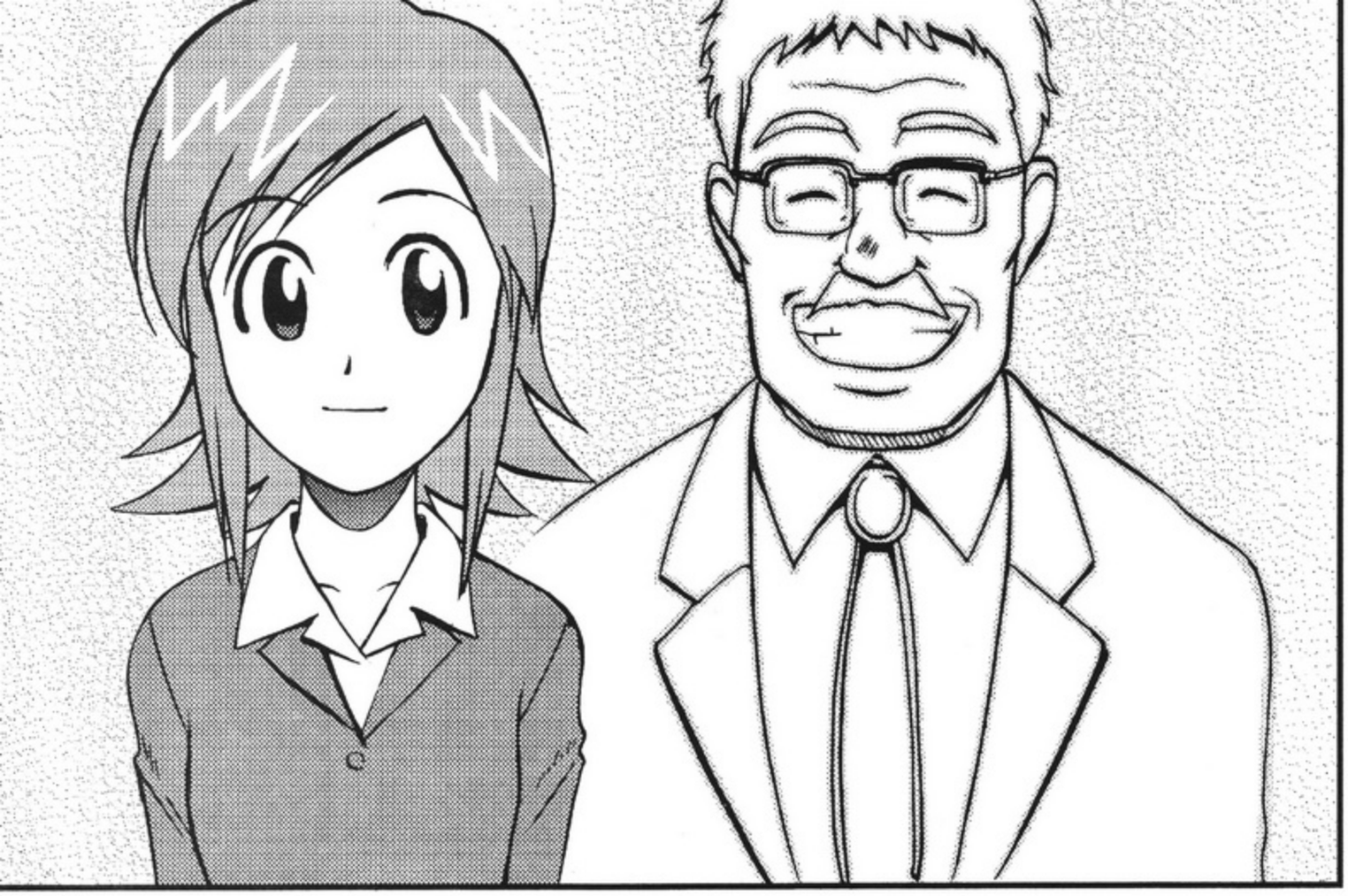
$$\left(-\heartsuit=-q\frac{\partial g}{\partial b}b'(f(x^{**}))\right.$$

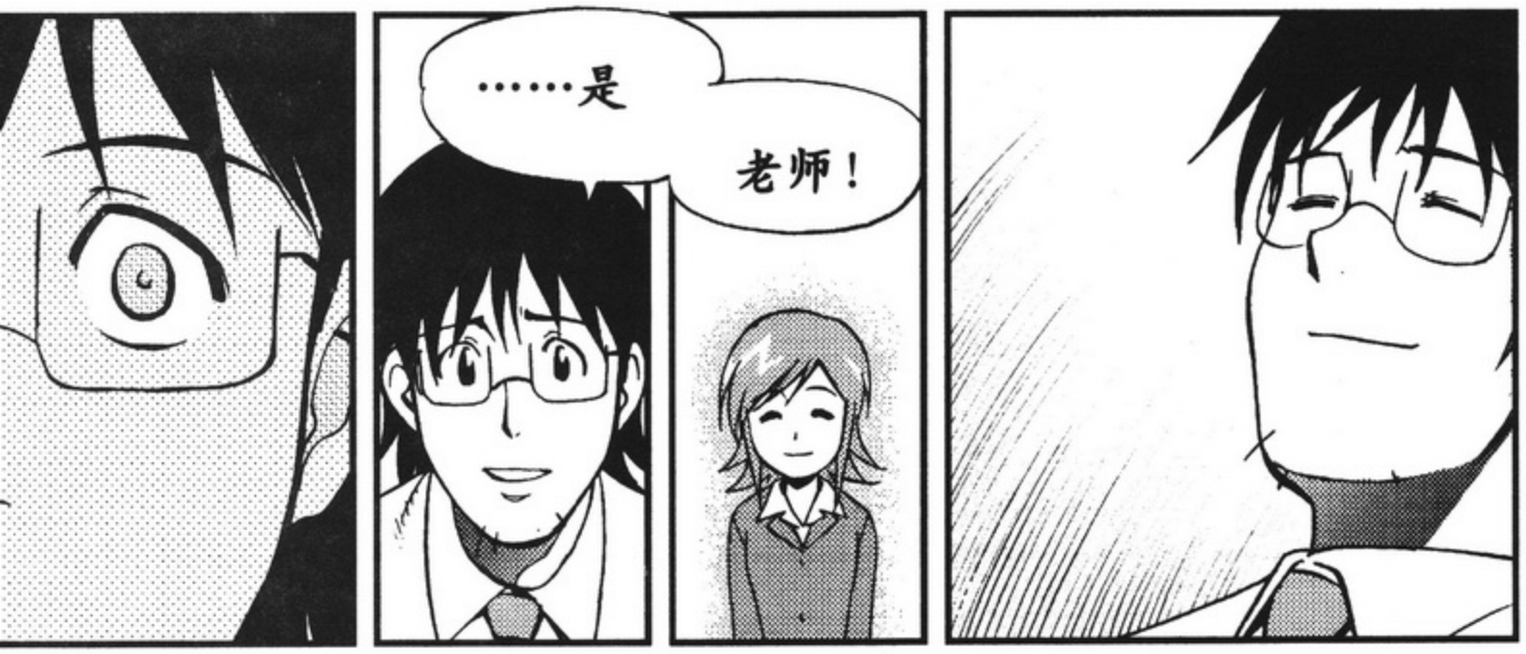
这是一个正的常数。

一般的税(所得税、消费税等)都是为了公共投资。

而环境税是通过征税来管理经济社会，从而保持良好的环境。

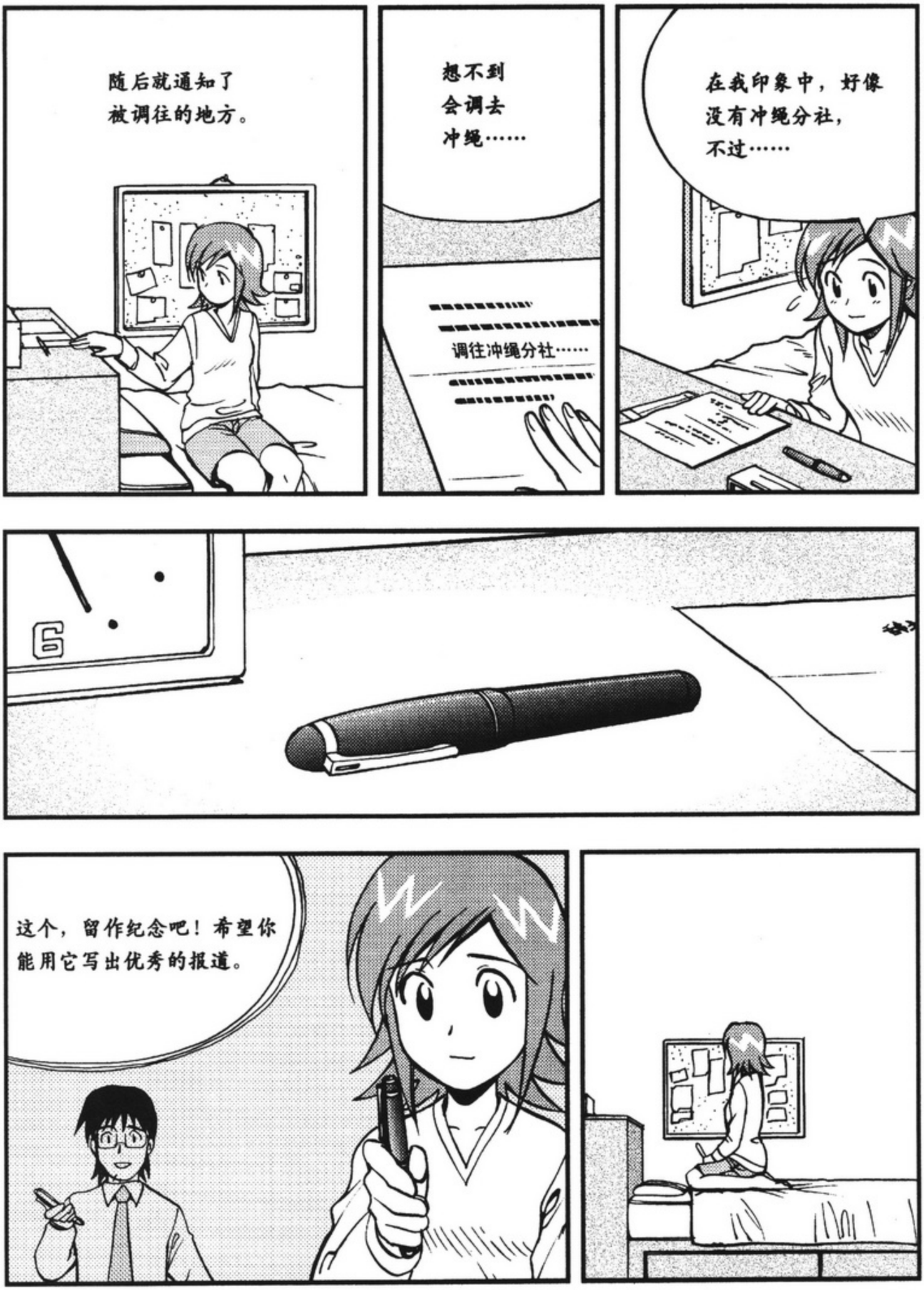
关社长，你理解了吗？




……是
老师！


数学……
真的很有趣！


呼！
几天后—
这下，要搬的东西
大致都收拾好了。
搬家公司
搬家公司
引间小姐，
这个……
调令
调令……
我也要调动？
不是只有关社
长自己吗？
增井
也有。
事先跟他
说过这事。
实际上，已经决定将
算田镇分社关闭了。


随后就通知了
被调往的地方。
想不到
会调去
冲绳……
调往冲绳分社……
在我印象中，好像
没有冲绳分社，
不过……
这个，留作纪念吧！希望你
能用它写出优秀的报道。

连载

# 环境与经济

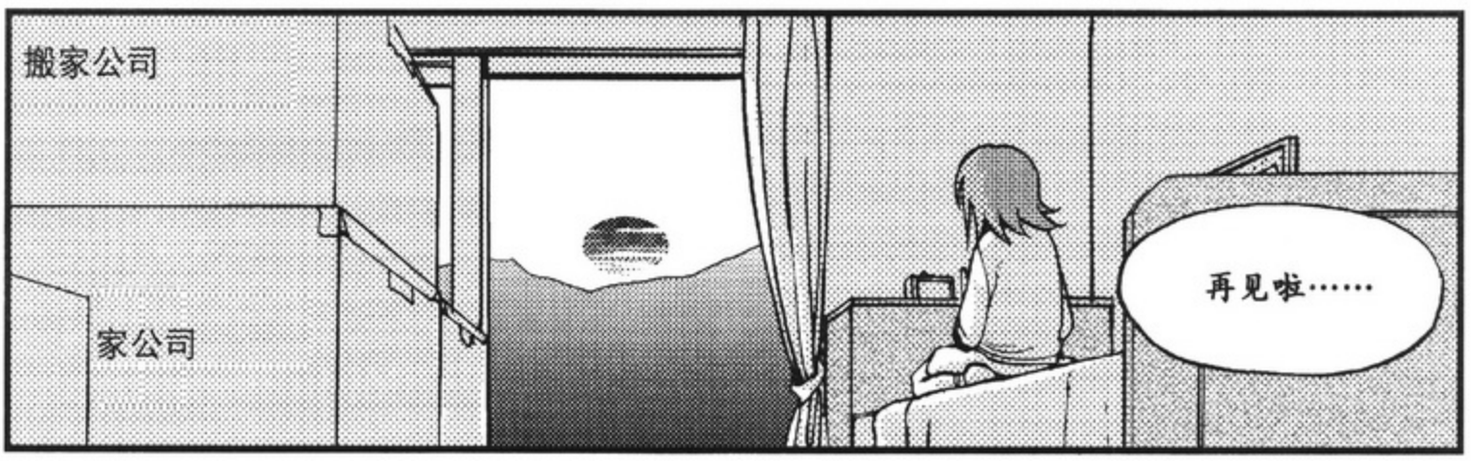


# K企业道歉

○X湾污染问题

## 向当地渔业协会寻求和解





## 隐函数的导函数

对于二元函数 $f(x,y)$，所有令函数值为定值 $c$ 的点$(x, y)$就构成了 $f(x,y)=c$ 的图形。仅取出它的图形的一部分，也就是解出形如 $y = h(x)$ 一元函数时，我们将其称为“隐函数”。隐函数 $y=h(x)$，其定义域内的全体 $x$ 都满足 $f(x,h(x))=c$。此时，我们来试求一下 $h(x)$的导函数。

设 $z=f(x,y)$，由全微分公式可知，$\mathrm{d}z=f_x\mathrm{d}x+f_y\mathrm{d}y$。就算点$(x, y)$在 $f(x,y)=c$ 的图像上移动的话，函数 $f(x,y)$ 的值也不会发生变化，$z$ 的增量始终为 0，即 $\mathrm{d}z = 0$。由全微分公式可知，$0=f_x\mathrm{d}x+f_y\mathrm{d}y$，假设 $f_y\neq 0$，则可以将其变形为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{f_x}{f_y}$。式子的左边是，图像上的点的 $y$ 增量除以 $x$ 增量的理想状态下的式子，它恰好表示的是微分系数。因此，有

$$h'(x)=-\frac{f_x}{f_y}$$

例 对于 $f(x,y)=x^2+y^2$ 来说，$f(x,y)=r^2$ 就是以原点为中心、半径为 $r$ 的圆。此时，在满足 $x^2\neq r^2$ 的点$(x, y)$附近，就能够解出 $f(x,y)=x^2+y^2=r^2$ 的隐函数是 $y=h(x)=\sqrt{r^2-x^2}$，或者 $y=h(x)=-\sqrt{r^2-x^2}$。此时，它的导函数由公式便可得到。

$$h'(x)=-\frac{f_x}{f_y}=-\frac{x}{y}$$

### 第6章 本章习题

**1.** 已知 $f(x,y)=x^2+2xy+3y^2$，求 $f_x$和$f_y$。

**2.** 在重力加速度为 $g$ 的情况下，长度为 $L$ 的钟摆的周期 $T$ 为：$T=2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}$

(已知：重力加速度 $g$ 随着距离地面高度的变化而变化)

(1) 写出 $T$ 的全微分式。

(2) 若 $L$ 加长百分之一，$g$ 减小百分之二，那么 $T$ 将会增大百分之几？

**3.** 使用锁链法则试求出 $f(x,y)=c$ 的隐函数 $h(x)$的微分公式。

# 尾　声

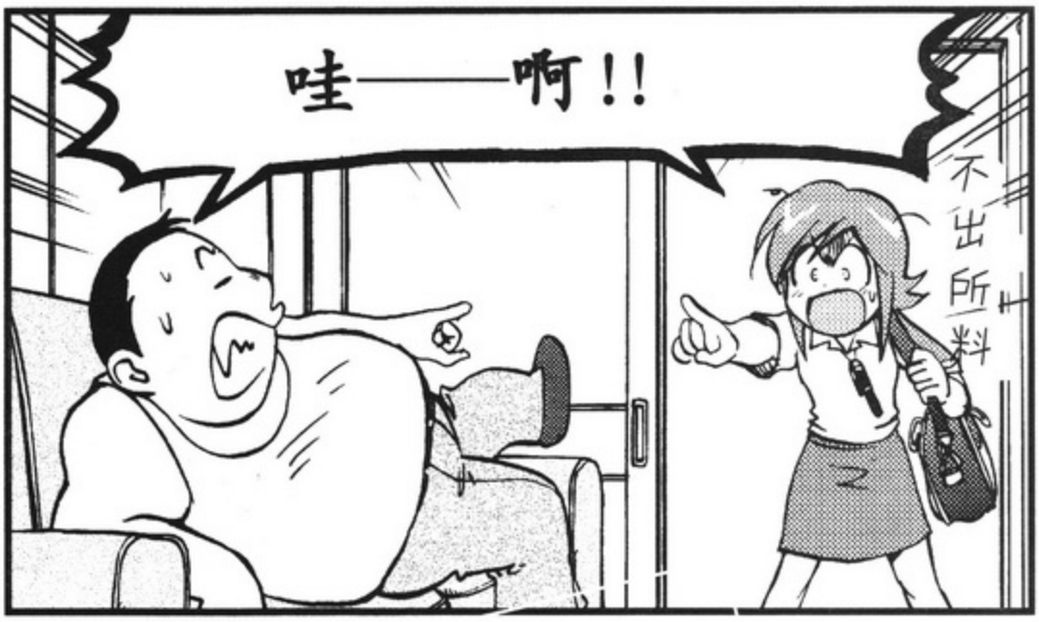
# 为什么会有数学




哇！
那边
就是了！
可是……
晨访报社
冲绳分社
在哪里呢……
嗯！
无论来到哪里
都要努力！
那霸机场


冲绳分社
晨访报社
荒凉


为什么有种似曾相识的感觉!!
开门

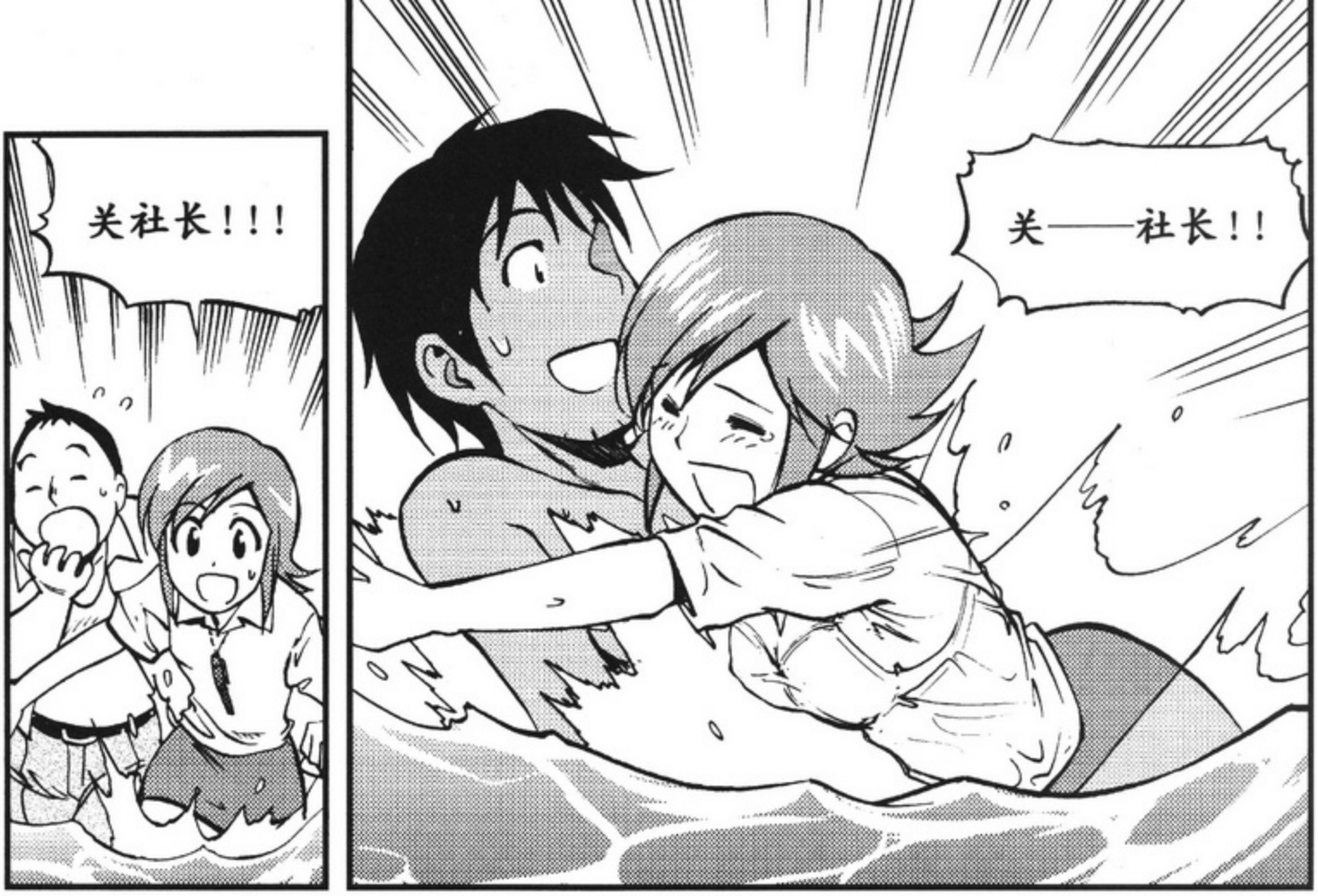

哇——啊!!
不出所料


难道说增井先生是冲绳分社社长?难道……
我也是刚刚才从机场到这里来的。
原来……是这样啊!


来这里了!!
刚在着就睡
呼


分社社长?……
哒哒

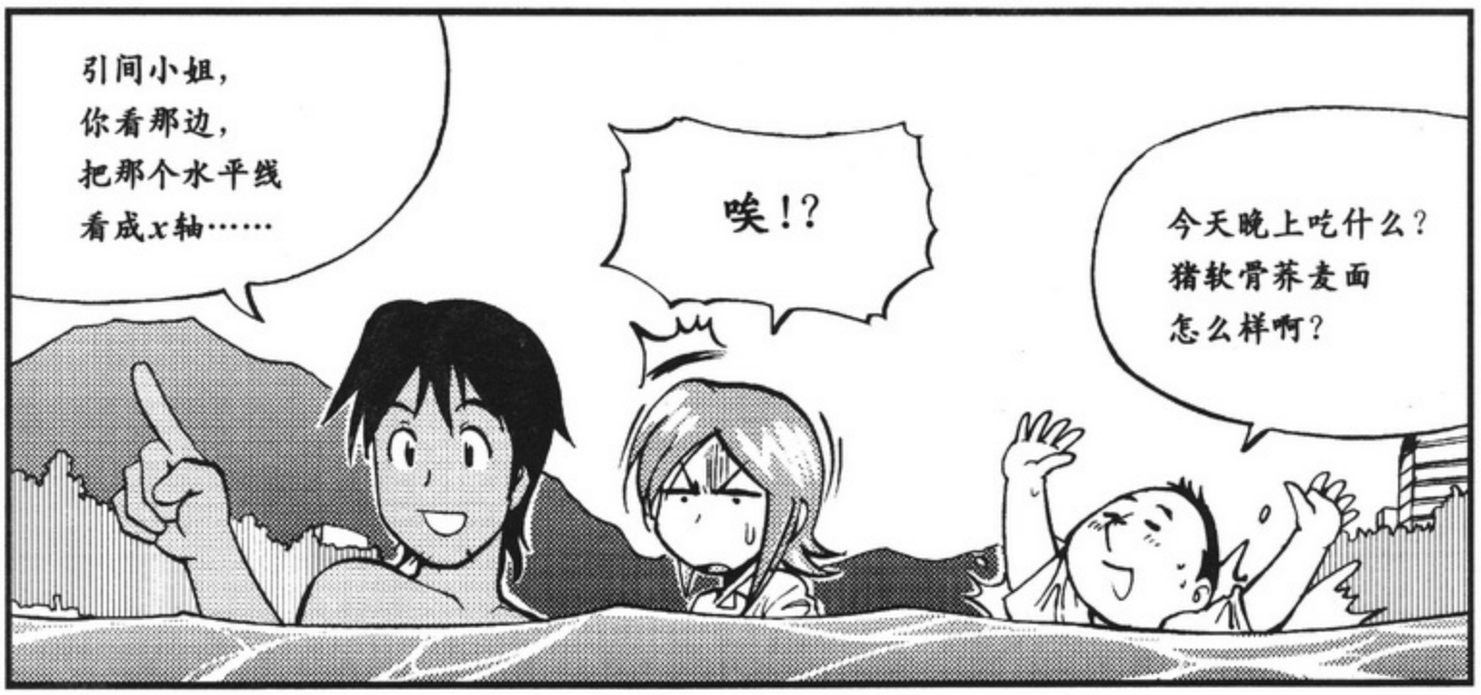

老奶奶，您知道这个报社的负责人是谁吗？
啊！
说起那个人，
他总是泡在海里。
游啊游
哒哒……
你们俩
都来啦！


关社长！！！
关——社长！！


还是想在温暖的地方多待一年，让我再慢慢地考虑一些事情。
来吧！！
我要吃遍冲绳！！


关社长，
您……知道
为什么会有
数学吗？
为什么会有？


就是为了传达一些无法
用语言表达的事情……


引间小姐，
你看那边，
把那个水平线
看成x轴……
唉!?
今天晚上吃什么？
猪软骨荞麦面
怎么样啊？


明天
也是个晴天！
热闹

〈全书完〉

# 附录

# 附录A 练习问题的答案及讲解

## 序 言

**1.** 将 $y=\frac{5}{9}(x-32)$ 代入 $z=7y-30$，得 $z=\frac{35}{9}(x-32)-30$

## 第1章

**1.** (1) $f(5)=g(5)=50$　　(2) $f'(5)=8$

**2.** $$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(a+\varepsilon)-f(a)}{\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(a+\varepsilon)^3-a^3}{\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{3a^2\varepsilon+3a^2\varepsilon+\varepsilon^3}{\varepsilon}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}(3a^2+3a\varepsilon+\varepsilon^2)=3a^2$$

因此，$f'(x)$ 的导函数为，$f'(x)=3x^2$

## 第2章

**1.** $$f'(x)=-\frac{(x^n)'}{(x^n)^2}=-\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}}=\frac{n}{x^{n+1}}$$

**2.** $f'(x)=3x^2-12=3(x-2)(x+2)$

若 $x<-2$ 则 $f'(x)>0$；若 $-2<x<2$，则 $f'(x)<0$；若 $x>2$，

则 $f'(x)>0$。所以，$x=-2$ 时取极大值；$f(-2)=16$，$x=2$ 时取极小值 $f(2)=16$

**3.** (1) 将 $f(x)=(1-x)^3$ 看作是由 $g(x)=x^2$ 和 $h(x)=1-x$ 复合而成的 $g(h(x))$，所以

$$f'(x)=g'(h(x))h'(x)=3(1-x)^2(-1)=-3(1-x)^2$$

(2) 对 $g(x)=x^2(1-x)^3$ 进行微分 $g'(x)=(x^2)'(1-x)^3+x^2((1-x)^3)'$

$$=2x(1-x)^3+x^2(-3(1-x)^2)=x(1-x)^2(2(1-x)-3x)$$

$$=x(1-x)^2(2-5x)$$

因此，在 $x=\frac{2}{5}$ 处取最大值 $f\left(\frac{2}{5}\right)=\frac{108}{3125}$

## 第3章

**1.** (1) $\int_1^3 3x^2\,\mathrm{d}x=3^3-1^3=26$

(2) $\int_2^4 \frac{x^3+1}{x^2}dx = \int_2^4 x+\frac{1}{x^2}dx = \int_2^4 xdx + \int_2^4 \frac{1}{x^2}dx$

$$=\frac{1}{2}(4^2-2^2)-\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{4}\right)=\frac{25}{4}$$

(3) $\int_0^5 x+(1+x^2)^7dx + \int_0^5 x-(1+x^2)^7dx = \int_0^5 2xdx = 5^2-0^2 = 25$

**2.** (1) $y=f(x)=x^2-3x$ 的图像和 $x$ 轴所围成的面积 $= \int_0^3 x^2-3xdx$

(2) $-\int_0^3 x^2-3xdx = -\frac{1}{3}(3^3-0^3)+\frac{3}{2}(3^2-0^2)=\frac{9}{2}$

## 第4章

**1.** (1) $(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

(2)由于$(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$，则

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{2} \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan\frac{\pi}{4}-\tan 0 = 1$$

**2.** 根据$f'(x)=(x)'e^x+x(e^x)'=e^x+xe^x=(1+x)e^x$，可得

最小值为$f(-1)=-\frac{1}{e}$

**3.** 设$f(x)=x^2, g(x)=\ln x$，再进行分部积分。

$$\int_1^e (x^2)'\ln xdx + \int_1^e x^2(\ln x)'dx = e^2\ln e - \ln 1$$

因此 $\int_1^e 2x\ln xdx + \int_1^e x^2\frac{1}{x}dx = e^2$

$$\int_1^e 2x\ln xdx = -\int_1^e xdx + e^2 = -\frac{1}{2}(e^2-1)+e^2 = \frac{1}{2}e^2+\frac{1}{2}$$

## 第5章

**1.** 对于$f(x)=e^{-x}$，有$f'(x)=-e^{-x}$，$f^{(2)}(x)=e^{-x}$，

$f^{(3)}(x)=-e^{-x}$，…因此

$$f(x)=1-x+\frac{1}{2!}x^2-\frac{1}{3!}x^3+\cdots$$

**2.** 对$f(x)=(\cos x)^{-1}$进行微分　$f'(x)=(\cos x)^{-2}\sin x$，

$$f^{(2)}(x)=2(\cos x)^{-3}(\sin x)^2+(\cos x)^{-2}\cos x$$

$$=2(\cos x)^{-3}(\sin x)^2+(\cos x)^{-1}$$

即$f(0)=1$，$f'(0)=0$，$f^{(2)}(0)=1$，

因此，二次近似函数为$f(x)=1+\frac{1}{2}x^2$

**3.** 完全按照漫画中的过程去做就可以了。就是说，依次微分后再代入$x=a$就可以了。

## 第6章

**1.** 对于$f(x,y)=x^2+2xy+3y^2$来说，有$f_x=2x+2y$和$f_y=2x+6y$

**2.** $T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}=2\pi g^{-\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}$的全微分式为

$$\mathrm{d}T=\frac{\partial T}{\partial g}\mathrm{d}g+\frac{\partial T}{\partial L}\mathrm{d}L=-\pi g^{-\frac{3}{2}}L^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}g+\pi g^{-\frac{1}{2}}L^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}L$$

因此，$\Delta T\sim-\pi g^{-\frac{3}{2}}L^{\frac{1}{2}}\Delta g+\pi g^{-\frac{1}{2}}L^{-\frac{1}{2}}\Delta L$

此处，我们代入$\Delta g=-0.02g$、$\Delta L=0.01L$

$$\Delta T\sim 0.02\pi g^{-\frac{3}{2}}L^{\frac{1}{2}}g+0.01\pi g^{-\frac{1}{2}}L^{-\frac{1}{2}}L=0.03\pi g^{-\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}=0.03\frac{T}{2}=0.015T$$

**3.** $f(x,y)=c$的隐函数是$y=h(x)$，在$x$附近有$f(x,h(x))=c$

所以，在这个范围内左边为常数函数，由此可知

$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}=0$根据锁链法则，得$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}=f_x+f_yh'(x)=0$

所以$h'(x)=-\frac{f_x}{f_y}$

# 附录B 本书中所涉及的主要公式、定理及函数

## ■ 一次方程式（一次函数）

经过点$(a,b)$，且斜率为$m$的直线的方程式

$y=m(x-a)+b$

## ■ 微　分

◇ 微分系数

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

◇ 导函数

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

其他的导函数符号

$$\frac{dy}{dx},\frac{df}{dx},\frac{d}{dx}f(x)$$

◇ 常数倍

$$\{\alpha f(x)\}'=\alpha f'(x)$$

◇ 幂函数的导函数

$$\{x^n\}'=nx^{n-1}$$

◇ 和的微分

$$\{f(x)+g(x)\}'=f'(x)+g'(x)$$

◇ 积的微分

$$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

◇ 商的微分

$$\left\{\frac{g(x)}{f(x)}\right\}'=\frac{g'(x)f'(x)-g(x)f'(x)}{\{f(x)\}^2}$$

◇ 复合函数

$$\{g(f(x))\}'=g'(f(x))f'(x)$$

◇ 反函数的微分

当$y=f(x)$，$x=g(y)$时

$$g'(y)=\frac{1}{f'(x)}$$

◇ 极　值

若$y=f(x)$在$x=a$处取极大值或极小值，则$f'(a)=0$

若$f'(a)>0$　则在$x=a$附近　$y=f(x)$呈递增趋势

若$f'(a)<0$　则在$x=a$附近　$y=f(x)$呈递减趋势

◇ 平均值定理

对于$a,b(a<b)$，存在$\xi$满足$a<\xi<b$，则

$f(b)=f'(\zeta)(b-a)+f(a)$

## ■ 常用函数的微分

### ◇ 三角函数

$$\{\cos\theta\}' = -\sin\theta, \{\sin\theta\}' = -\cos\theta$$

### ◇ 指数函数

$$\{e^x\}' = e^x$$

### ◇ 对数函数

$$\{\ln x\}' = \frac{1}{x}$$

## ■ 积　分

### ◇ 定积分

当 $F'(x) = f(x)$ 时

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

### ◇ 定积分区间的接续

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x$$

### ◇ 定积分的和

$$\int_a^b \{f(x) + g(x)\}\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

### ◇ 定积分的常数倍

$$\int_a^b \alpha f(x)\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

### ◇ 换元积分

当 $x = g(y), b = g(\beta), a = g(\alpha)$ 时

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f'(g(y))g'(y)\mathrm{d}y$$

### ◇ 分部积分

$$\int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x + \int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x = f(b)g(b) - f(a)g(a)$$

## 泰勒展开

当$f(x)$在$x=a$附近进行泰勒展开时

$$f(x)=f(a)+\frac{1}{1!}f'(a)(x-a)+\frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2$$

$$+\frac{1}{3!}f'''(a)(x-a)^3+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^{(n)}+\cdots$$

### ◇ 几种常用函数的泰勒展开

$$\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n)!}x^{2n}+\cdots$$

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1}+\cdots$$

$$e^x=1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}x^n+\cdots$$

## 偏微分

### ◇ 偏微分

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\lim_{k\to 0}\frac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k}$$

### ◇ 全微分

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$$

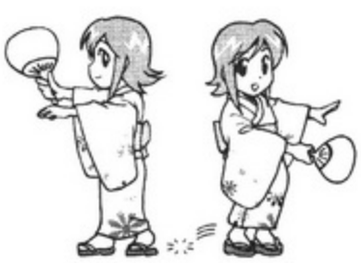
### ◇ 锁链法则(Chain rule)

当$z=f(x,y)$，$x=a(t)$，$y=b(t)$时，

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t}$$

## 微积分合唱曲——三角函数版——

难以了解的道理也能用
合唱稍微理解微积分～



sin・cos在圆圈
中微积分～



sin的微分
是cos～



cos的积分
是sin～



sin・cos在圆圈
中用微积分互换～



（O-3662.0104）
责任编辑：王　炜　赵丽艳
责任制作：董立颖　魏　谨
封面制作：
铭轩堂设计：13671110894
铭志辉鸿　轩雅静氣

用漫画这种形式讲数学、物理和统计学，十分有利于在广大青少年中普及科学知识。

周恩来、邓颖超秘书，周恩来邓颖超纪念馆顾问
中日友好协会理事，《数理天地》顾问，全国政协原副秘书长

用漫画和说故事的形式讲数学，使面貌冷峻的数学变得亲切、生动、有趣，使学习数学变得容易，这对于提高全民的数学水平无疑是功德无量的事。

《数理天地》杂志社　社长 总编
“希望杯”全国数学邀请赛组委会 命题委员会主任

用漫画的形式，讲解日常生活中的数学、物理知识，更能让大家感受到数学殿堂的奥妙与乐趣。

《光明日报》 原副总编辑
中华炎黄文化研究会 常务副会长

科学漫画是帮助学习文科的人们用形象思维的方式掌握自然科学的金钥匙。

中国人民大学外语学院日语专业 主任
大学日语教学研究会 会长

在日本留学的时候，我在电车上几乎每次都能看到很多年轻的白领看这套图书，经济实惠、图文并茂、浅显易懂，相信这套图书的中文版也一定会成为白领们的手中爱物。

大连理工大学 能源与动力学院 博士 副教授

我非常希望能够在书店里看到这样的书：有人物形象、有卡通图、有故事情节，当然最重要的还有深厚的理工科底蕴。我想这样的书一定可以大大提升孩子们的学习兴趣，降低他们对于高深的理工科知识的恐惧感。

北京启明星培训学校 校长

书中的数学知识浅显实用，漫画故事的形式使知识贴近生活，概念更容易理解。

北京大学 数学科学学院 博士

上架建议：科普/漫画
ISBN 978-7-03-025321-7
9 787030 253217 >
定价：29.80元

科学出版社 东方科龙
http://www.okbook.com.cn
zhaoliyan@mail.sciencep.com